

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
**Departamento de Óptica**



**SÍNTESIS Y CARACTERIZACIÓN DE HACES DE  
LUZ CON DISTRIBUCIONES DE POLARIZACIÓN  
NO-UNIFORMES.**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**  
**PRESENTADA POR**

**Victoria Ramírez Sánchez**

Bajo la dirección de los doctores

Gemma Piquero Sanz  
Massimo Santarsiero

**Madrid, 2011**

**ISBN: 978-84-694-2059-1**

© Victoria Ramírez Sánchez, 2010

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
**Departamento de Óptica**



**SÍNTESIS Y CARACTERIZACIÓN  
DE HACES DE LUZ CON DISTRIBUCIONES DE  
POLARIZACIÓN NO-UNIFORMES**

Memoria para optar al grado de doctora  
presentada por

**Victoria Ramírez Sánchez**

realizada bajo la dirección de los doctores

Gemma Piquero Sanz  
Massimo Santarsiero

**Madrid, 2010**



*A mis padres  
y a mi hermano*





# Agradecimientos

Nunca he tenido que escribir unos agradecimientos y ahora mismo no se por donde empezar porque se me amontonan los *gracias*!!!

En primer lugar, *GRACIAS* a mis padres que me han apoyado a pesar de desconocer por completo el mundo de la investigación, por intentar comprender mis decisiones y sobre todo por respetarlas. Gracias por la paciencia que demostrasteis tener hasta que gané mi primer sueldo, por esperar con ilusión a que llegue el viernes o el sábado, por no quejaros cuando no he ido a visitaros porque el plan que tenía en Madrid era mejor o porque me daba pereza coger el autobús... gracias a mi madre por prepararme los “tuppers”, a mi padre por trasladarse a “retropatro” mientras estuve escayolada y a mi hermano que durante este año me ha preguntado  $n$  veces ¿cuánto te queda para presentar la tesis? quizá sin esa pequeña presión todavía estaría a medio escribir... Y por supuesto, gracias a mi tío Pablo por todas las veces que, con una sonrisa en la cara, me ha recogido en la puerta de casa para llevarme al pueblo o traerme a Madrid, me entristece que ya no esté para leer esta frase y para ver el resultado de estos 10 años de estudio, todavía me acuerdo del día que me acompañó a la facultad para matricularme... Gracias a toda la familia de Elena por haber sido mi familia-adoptiva en Madrid, Dani me siento orgullosa de ser la “prima Vicky del pueblo”.

Gracias a mis directores de tesis, por enseñarme prácticamente todo lo que se sobre polarización y coherencia (que tampoco es mucho...) y por ayudarme con todo, con las cosas fáciles y con las más difíciles. A Gemma, por su paciencia en el laboratorio, por transmitirme su optimismo, por animarme en los peores momentos (que los ha habido) y por soportarme cuando he estado en modo gruñón. Gracias por compartir conmigo tu forma de entender la ciencia y la

docencia. A Massimo, por haber venido a Madrid a trabajar con nosotros y haber convertido el mes de noviembre de 2008 en el más productivo de mi doctorado, por enseñarme a hacer “óptica del siglo XIX” y por todas las horas que ha invertido en las lecciones vía Skype. Grazie mille por dejarme ser tu profe de español y tu guía turística en Toledo.

Gracias a Julio, “el estilista del grupo”, que nos ha ayudado cada vez que se lo hemos pedido: en el laboratorio, resolviendo dudas, con el LaTeX, corrigiendo el inglés de los artículos, con el papeleo de la tesis... A Charo y Pedro por velar, desde el otro lado del pasillo, para que la tesis saliese adelante y por todo lo que directa o indirectamente he aprendido de ellos. Gracias al profesor Franco Gori, que me abrió las puertas de su despacho desde el minuto uno en Roma Trè, por hacer realidad aquella frase “tres meses, tres artículos” y en definitiva, por su gran generosidad científica. No quiero olvidarme del profesor Riccardo Borghi que me hizo entender el significado de la expresión Romana “Che figo!!!” aplicada a la óptica y a qué escala es importante lo que hacemos.

Desde primero y ya hace 10 años de aquello, Celia (mi compi de prácticas y portadora de racionalidad en los gabinetes de crisis), Marcos (hay una frase que resume todo lo que te tendría que decir: eres nuestra supernena favorita!) Blanquita (gracias por escucharme a cualquier hora, por prestarme tu sofá y por aguantar mis sermones), Elena y Mario (esta aventura la empezamos juntos compartiendo un ordenador y aunque ahora parece que se acaba, a pesar de los “bachecillos” y de que a veces nuestros caminos se hayan bifurcado temporalmente, espero que sigan convergiendo y teneros siempre!!!), el sector atmósfera: MariCarmen (gracias por los viajes compartidos, las visitas al despacho y por ser tan golosa como yo!), Paúl (gracias por ser comodín a la hora de comer) y Vanesa-Patines (gracias por haberme enseñado tantos rincones chulos de Madrid, por las clases de patinaje, por haber co-creado el blog gastronómico y por la ilusión que pones en todo lo que haces) *GRACIAS* a todos porque, de una u otra forma, habéis sido muy importantes para mi y eso... os hace especiales!!! Chechu, Sergio, Jarín, Willy, Guada, Joaquín...gracias por los reencuentros y los juernes!!!

Mil gracias a todos los becarios del Departamento de Materiales que me han adoptado como si fuese una más en las comidas, cafés, cuchipandas, fiestas de navidad, cumpleaños, celebraciones de tesis, barbacoas y demás eventos, espero

no olvidarme de nadie: Ángela, Belén, Clara, David Maestre y David Ciudad, Ire, Javi, Manu, Martin, Noemi, Rocío Cortes y Rocío Ranchal, Vio, Virginia y todos los que habéis pasado una temporada más o menos larga compartiendo la hora diaria de “cacareo” en la cafetería. A los “mayores del departamento”, Ana, Emilio, Lucas y Oscar, gracias por hacer tan fácil la transición profe de prácticas-amigo y por transmitirnos la sabiduría que da la experiencia!!!

Tampoco quiero olvidarme de mis “compis” temporales de laboratorio: Andresito, quien me animó a subir a hablar con Gemma para que me contase de qué iba todo esto, gracias por el año en que compartimos mesas, ordenadores y polarizadores y que finalizó de la mejor forma posible con el congreso de Alicante! Antonio (mi becario), gracias por traer siempre contigo tanta energía positiva y por ponerle música a los meses pre-Roma, Jesús Cañamero, al que me unían las raíces toledanas y Alejandro Manjavacas, fue un placer conocerte mejor en Orense!

Ahhh! Gracias Blanquita por estudiar alemán y traducirme el nombre para las polarizaciones: *paralela* = *parallel* y *perpendicular* = *senkrecht*. Elena y Jose, gracias por dejarme echar un ojo a vuestras tesis! Edu, gracias por ser mi primer contacto en el departamento!

Gracias a mis niñas, Vane, M. Pili y Cris, por haber estado a mi lado desde que teníamos quince años, por no fallarme nunca, por mantenerse siempre cerca, por no tener en cuenta mis ausencias, por los consejos que me habéis dado, por obligarme de vez en cuando a desconectar, por todos esos ratitos de risas que me habéis regalado durante todos estos años, por momentos como el test de la “princess” y el guisante, por las noches en blanco (en el sentido francés de la expresión), los domingos de rastro y tostas, los botellones en el salón de Tommy, los cafés en la cocina de Kandy, por todo lo que implican los verbos de la primera conjugación que tanto nos gustan... *GRACIAS* porque sin saber mucho de Física siempre os habéis interesado por lo que hago, por alegraros cada vez que publicaba un artículo, por no cansaros de esta “ratita de biblioteca”...

Y por último, *GRACIAS* a todos los que habéis estado al otro lado de la pantalla creando un mundo diferente como el que encontró Alicia al cruzar el espejo...

Además quisiera agradecer a las siguientes instituciones la financiación de este trabajo:

- Ministerio de Educación y Ciencia, por la beca de Formación del Personal Investigador asociada al proyecto FIS2004-01900 titulado “Estructura y propagación de haces luminosos” que he disfrutado desde Septiembre de 2006 hasta Agosto de 2010.
- Ministerio de Educación y Ciencia, por el proyecto FIS2007-63396 titulado “Análisis, modelado y caracterización de haces láser”
- Ministerio de Educación y Ciencia por su “Ayuda para estancias breves en España y en el extranjero,” que me permitió trabajar tres meses en el Departamento de Física “Edoardo Amaldi” de la Università degli Studi di Roma Trè, de Roma (Italia).
- Universidad Complutense de Madrid y Comunidad de Madrid por las Ayudas a Grupos de Investigación nº 910335 (2007), “Propagación y control de la estructura espacial y vectorial de haces de luz”

Por último, agradezco a la Directora del Departamento de Óptica, la Profesora Dña. María Luisa Calvo Padilla, los medios puestos a mi disposición para la realización de esta Tesis Doctoral.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Caracterización de haces con distribuciones de polarización no uniformes</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Caracterización local . . . . .	6
2.2.1. Vectores de Jones . . . . .	6
2.2.2. Matriz de Polarización . . . . .	7
2.2.3. Parámetros de Stokes locales . . . . .	10
2.3. Caracterización global . . . . .	12
2.3.1. Grado de polarización ponderado . . . . .	13
2.3.2. Contenido circular . . . . .	14
2.3.3. Contenido radial y azimutal . . . . .	18
2.3.4. Parámetro de calidad . . . . .	26
2.3.5. Parámetro de kurtosis . . . . .	28
<b>3. Síntesis de haces totalmente y no-uniformemente polarizados mediante polarizadores no convencionales</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.2. Descripción general . . . . .	32
3.3. Síntesis de campos espiralmente polarizados . . . . .	33
3.4. Caracterización de la polarización . . . . .	37
3.5. Caracterización espacial global . . . . .	42
3.5.1. Haces de tipo Bessel-Gauss . . . . .	49

<b>4. Síntesis de haces totalmente y no-uniformemente polarizados mediante sistemas interferométricos de tipo Mach-Zehnder y transmitancias en amplitud</b>	<b>55</b>
4.1. Introducción . . . . .	55
4.2. Procedimiento de síntesis . . . . .	56
4.2.1. Transmitancias supergaussianas . . . . .	58
4.3. Caracterización local . . . . .	59
4.4. Caracterización global . . . . .	64
4.5. Conformado global del haz . . . . .	66
<b>5. Condiciones de realizabilidad para fuentes electromagnéticas parcialmente coherentes</b>	<b>71</b>
5.1. Introducción . . . . .	71
5.2. Matrices de coherencia . . . . .	72
5.2.1. Matriz de densidad espectral mútua . . . . .	72
5.2.2. Matriz de coherencia-polarización . . . . .	74
5.3. Una condición suficiente . . . . .	75
5.4. Aplicación al caso gaussiano . . . . .	80
5.5. Apéndice . . . . .	84
<b>6. Síntesis de haces del modelo de Schell mediante sistemas interferométricos de tipo Mach-Zehnder</b>	<b>87</b>
6.1. Introducción . . . . .	87
6.2. Condiciones de realizabilidad . . . . .	89
6.3. Procedimiento de síntesis . . . . .	91
6.3.1. Síntesis de la fuente incoherente espacial . . . . .	94
6.4. Aplicación a la síntesis de fuentes EGSM . . . . .	99
6.5. Apéndices . . . . .	103
<b>7. Síntesis de haces parcialmente coherentes y espiralmente polarizados utilizando un convertidor de polarización</b>	<b>107</b>
7.1. Introducción . . . . .	107
7.2. Condición de invariancia de la polarización . . . . .	108
7.3. Procedimiento de síntesis . . . . .	111

7.4. Caracterización del haz . . . . .	116
7.4.1. Caracterización local . . . . .	116
7.4.2. Caracterización global . . . . .	117
<b>8. Conclusiones</b>	<b>121</b>
<b>Thesis summary and conclusions</b>	<b>125</b>
<b>Lista de acrónimos</b>	<b>135</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>137</b>
Artículos relacionados con la tesis . . . . .	137
Otras publicaciones . . . . .	138
<b>Bibliografía</b>	<b>139</b>





# Capítulo 1

## Introducción

La radiación que emiten la mayoría de los láseres modernos es uniformemente polarizada, es decir, el estado de polarización es el mismo en todos los puntos de la sección transversal del haz. Sin embargo, los haces no-uniformemente polarizados (NUP) han atraído el interés de la comunidad científica en los últimos años. Por ejemplo, se ha demostrado que los haces radialmente o azimutalmente polarizados, que pertenecen a la clase general de los haces vectoriales con simetría cilíndrica (también denominada simetría axial o rotacional), son especialmente útiles para desarrollar aplicaciones en campos tan diversos como la microscopía de alta resolución, el procesamiento de materiales, el atrapamiento y la aceleración de partículas mediante procedimientos ópticos, etc. Por esta razón, numerosos trabajos se han centrado en el estudio y la síntesis de haces con distribuciones de polarización axialmente simétricas.

Por otro lado, tan importante como el diseño de sistemas ópticos que permitan sintetizar haces con las propiedades deseadas es la caracterización de los mismos. Para ello, se deben utilizar parámetros que proporcionen información relevante sobre las características del haz que se pretende estudiar. Tales parámetros, o figuras de mérito, se deben definir exigiendo que sean válidos para haces arbitrarios, que se puedan determinar analíticamente o numéricamente y que sean medibles.

El objetivo del presente trabajo de investigación es doble. Por un lado, proponer diversos métodos para sintetizar haces y/o campos con distribuciones de

polarización no-uniformes en un determinado plano y, por otro lado, caracterizar los campos generados.

El proceso de caracterización se aborda desde dos perspectivas diferentes: desde el punto de vista local y globalmente. El formalismo y los parámetros necesarios para llevar a cabo la caracterización de la polarización de los distintos tipos de haces NUP que se estudian en cada uno de los capítulos de la tesis se introducen en el capítulo 2. En particular, se presentan algunos parámetros nuevos que han sido introducidos por el grupo de investigación al que pertenezco para describir distribuciones de polarización no-uniformes, así como los montajes diseñados y propuestos para poder determinarlos experimentalmente. También se presentan en este capítulo varios parámetros útiles para caracterizar la estructura espacial, es decir, la distribución transversal de irradiancia, de los haces NUP que se estudiarán en capítulos sucesivos.

A continuación, se describen dos métodos de síntesis de haces completamente coherentes y totalmente y no-uniformemente polarizados (TNUP).

En primer lugar, en el capítulo 3 se sintetizan haces espiralmente polarizados, que son haces linealmente y no-uniformemente polarizados que incluyen, como casos particulares, a los haces radialmente o azimutalmente polarizados. El procedimiento de síntesis se basa en la utilización de polarizadores no convencionales, en particular, polarizadores azimutales o convertidores de polarización basados en dispositivos de cristal líquido, seguidos de un rotador de la polarización. Por otra parte, se muestra que los haces espiralmente polarizados pertenecen a una clase más general de haces TNUP que resulta al superponer haces cuyo estado de polarización viene descrito por la base de polarización de Gori o equivalentemente, al superponer haces con vórtices. En este capítulo se estudia también el parámetro de calidad de estos haces generales analizando las condiciones necesarias para optimizarlo.

Un procedimiento alternativo para producir haces con distribuciones de polarización no-uniformes en un plano determinado es utilizar sistemas interferométricos. Este tipo de dispositivos ya ha sido propuesto para modificar las características espaciales y el estado de polarización del haz insertando en cada brazo del interferómetro láminas de fase, tramos de propagación libre y sistemas ópticos

ABCD generales. En el capítulo 4 se propone un sistema interferométrico de tipo Mach-Zehnder que permite sintetizar haces con distribución de polarización lineal y no uniforme colocando transmitancias en amplitud diferentes en los brazos del interferómetro, en particular, transmitancias supergaussianas. Esta configuración tiene la ventaja de ser muy versátil en el sentido de que es posible generar una gama más variada de haces linealmente y no-uniformemente polarizados que con el primer método propuesto sin más que cambiar los parámetros de las transmitancias o el tipo de función de transmisión de las mismas.

Además, rotando el eje de transmisión de un polarizador lineal situado a la salida del sistema interferométrico se puede conformar el haz modificando simultáneamente su perfil de irradiancia y los parámetros globales que describen su estructura espacial. La aplicación de los haces TNUP al conformado espacial se ha estudiado en este capítulo para los haces generados con transmitancias supergaussianas aunque podría extenderse a cualquier haz TNUP que se sintetizase mediante otros dispositivos ópticos o esquemas experimentales.

En los capítulos anteriores se ha asumido que los haces eran espacialmente y totalmente coherentes, de modo que las características relativas a la polarización se podían representar mediante la matriz de polarización del haz. En general los haces son parcialmente coherentes en su sección transversal, de manera que es necesario utilizar un formalismo más general para caracterizarlos de forma adecuada. Aunque en el caso de los haces parcialmente coherentes y uniformemente polarizados las características relativas a la polarización se pueden estudiar de forma independiente a las referidas a la coherencia, en casos más generales se deben estudiar conjuntamente, recurriendo a la recientemente desarrollada teoría de las correlaciones de los campos electromagnéticos.

En el capítulo 5 se introduce el formalismo de la matriz de densidad espectral mútua (o equivalentemente la matriz de coherencia-polarización) para describir haces electromagnéticos parcialmente coherentes. A continuación se estudian las condiciones que debe satisfacer esa matriz para que efectivamente represente una fuente físicamente realizable. Además, se propone un método denominado “regla de superposición generalizada” que permite construir matrices de densidad espectral mútua que describen fuentes parcialmente coherentes con distribuciones

de polarización diversas, y que son siempre realizables desde el punto de vista físico.

La “regla de superposición generalizada” introducida en el capítulo 5 sugiere un método para sintetizar haces parcialmente coherentes y no-uniformemente polarizados. En el capítulo 6 se describe un procedimiento experimental mediante el cual se pueden generar diversas fuentes electromagnéticas no uniformemente polarizadas de tipo Schell, y que se basa en la aplicación del teorema de van Cittern-Zernike. Se pone así de manifiesto la conexión que existe entre este teorema y la “regla de superposición generalizada”.

El método descrito en los capítulos 5 y 6 permite generar gran variedad de haces parcialmente coherente y no-uniformemente polarizados, pero no todos los posibles. En el capítulo 7 se presenta otro método de síntesis que no se basa en la aplicación del teorema de van Cittern-Zernike y que permite construir haces con propiedades de coherencia que no se pueden describir mediante el modelo de Schell. En este caso, el método propuesto se basa en la superposición incoherente de modos y se aplica para generar un haz parcialmente coherente con distribución de polarización de tipo espiral que resulta ser invariante en propagación libre.

Finalmente, las principales conclusiones que se derivan de este trabajo se exponen en el capítulo 8.

Esta tesis se ha realizado en el seno del grupo de investigación “Óptica física y haces láser” del Departamento de Óptica de la Universidad Complutense de Madrid y en colaboración con el grupo de investigación del Profesor F. Gori del Departamento de Física “Edoardo Amaldi” de la Università degli Studi di Roma Tre (Roma, Italia). Los resultados que se presentan en los capítulos 2 (sección 2.3.3), 3, 4, 5 (secciones 5.3 y 5.4), 6 y 7 de esta memoria son, todos ellos, resultados originales.

## Capítulo 2

# Caracterización de haces con distribuciones de polarización no uniformes

### 2.1. Introducción

En este capítulo se introduce el formalismo que se utiliza posteriormente para caracterizar haces de luz que presentan distribuciones de polarización no uniformes en su sección transversal. La caracterización de la polarización de un haz puede llevarse a cabo desde dos perspectivas diferentes: desde el punto de vista local, empleando funciones que dependen de la posición (del punto) en la sección transversal, o bien globalmente, es decir, a través de parámetros globales que proporcionan información global sobre las características de polarización del haz. Además de caracterizar la polarización de un haz se puede estudiar, desde un punto de vista global, su estructura espacial a través de parámetros como la calidad y la curtosis.

Nuestro estudio se centra en haces vectoriales no-uniformemente polarizados (NUP) y se enmarca dentro de la aproximación paraxial, en consecuencia, podemos despreciar la componente longitudinal del campo y trabajar únicamente con las componentes transversales del mismo [MM02, MM09]. Los parámetros introducidos en este capítulo se usan en los capítulos siguientes para caracterizar los

haces no-uniformemente polarizados que se han sintetizado.

## 2.2. Caracterización local

Para describir las características de polarización de un haz se pueden utilizar diversos formalismos disponibles en la literatura. Por un lado, el formalismo de Jones donde se representa el estado de polarización a través de un vector complejo denominado vector de Jones, y a partir del cual se define la matriz de polarización, y por otro lado, el formalismo de Stokes, especialmente útil en el caso de luz parcialmente polarizada y donde el estado de polarización se describe en términos de los parámetros de Stokes, que se pueden medir de forma sencilla.

### 2.2.1. Vectores de Jones

Se considera un haz de luz cuasi-monocromático propagándose en la dirección  $z$ , el vector de Jones que representa el campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , asociado a dicho haz en un determinado plano  $z$  y en aproximación paraxial, se define [SH62, BW99, GO03, MM09]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} E_s(\mathbf{r}) \\ E_p(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{r}$  denota un punto de la sección transversal del haz y los subíndices  $s$  y  $p$  se refieren a las componentes de polarización del campo, perpendiculares a la dirección de propagación  $z$  (ver Fig. 2.1). En lo que sigue, por comodidad y sin pérdida de generalidad, se supone que las componentes  $s$  y  $p$  del campo son paralelas a los ejes de coordenadas cartesianos. Pero en general, los subíndices  $s$  y  $p$  no tienen porqué referirse a estados de polarización lineal según  $x$  e  $y$ .

El vector de Jones proporciona el estado de polarización en cada punto del perfil transversal del haz. En particular, si  $E_s(\mathbf{r})$  y  $E_p(\mathbf{r})$  son funciones determinísticas, la Ec. (2.1) representa un haz totalmente y no-uniformemente polarizado (TNUP) con estado de polarización elíptico en cada punto. Más en general, cualquier haz TNUP se puede describir a través de un vector de Jones de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} f(\mathbf{r}) \\ g(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

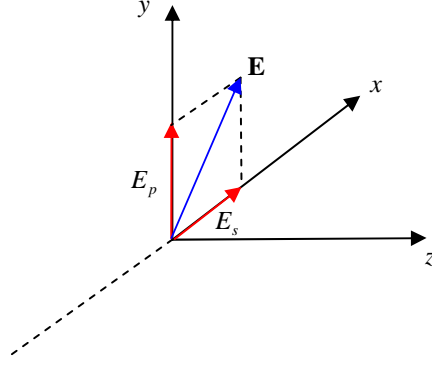


Figura 2.1: Representación de las componentes transversales del campo eléctrico en el espacio.

donde  $f$  y  $g$  son funciones analíticas conocidas y  $E_0$  representa un proceso estocástico.

En el formalismo de Jones, un sistema óptico que puede modificar el estado de polarización de un haz de luz se representa a través de una matriz  $2 \times 2$ , denominada matriz de Jones. Dichos sistemas son capaces de cambiar el estado de polarización del campo incidente modificando su amplitud y/o su fase, es decir, alterando las componentes de su vector de Jones. Aquellos campos que no cambian su estado de polarización al propagarse a través de un sistema representado por una matriz de Jones se dice que son autoestados de polarización.

### 2.2.2. Matriz de Polarización

Cuando el campo electromagnético que se pretende estudiar es no-determinístico, los parámetros que aparecen en el vector de Jones son variables aleatorias. En tal caso, para describir el estado de polarización en un punto del campo,  $\mathbf{r}$ , se puede recurrir a la matriz de polarización,  $\hat{P}$ , que se define a partir del vector de Jones como sigue [GO98, GS98, WO07a]

$$\hat{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z) = \begin{pmatrix} P_{ss}(\mathbf{r}) & P_{sp}(\mathbf{r}) \\ P_{ps}(\mathbf{r}) & P_{pp}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$



siendo

$$P_{jk}(\mathbf{r}) = \langle E_j^*(\mathbf{r}; t) E_k(\mathbf{r}; t) \rangle, \quad (2.4)$$

con  $j, k = s, p$  y donde los corchetes  $\langle \rangle$  representan un promedio temporal realizado en un tiempo suficientemente largo en comparación con los tiempos típicos en los que cambian las variables aleatorias que definen el campo. Se supone que el campo es ergódico, por esto, el promedio temporal es equivalente a realizar una media sobre todas las posibles realizaciones del campo. Los elementos diagonales de esta matriz representan la intensidad asociada a cada una de las componentes transversales del campo mientras que los elementos no diagonales representan las correlaciones entre las componentes  $s$  y  $p$  del campo en un punto  $\mathbf{r}$  de la sección transversal del haz. De hecho, la irradiancia en cada punto es proporcional a la traza de esta matriz, es decir,  $I(\mathbf{r}) \propto P_{ss}(\mathbf{r}) + P_{pp}(\mathbf{r})$ . La matriz  $\hat{P}$  es hermítica. Por tanto, queda determinada por cuatro valores reales,  $P_{ss}$ ,  $P_{pp}$  y módulo y argumento de  $P_{sp}$ , ya que  $P_{ps}(\mathbf{r}) = P_{sp}^*(\mathbf{r})$ . Los elementos de la matriz de polarización son medibles, en particular,  $P_{ss}(\mathbf{r})$  y  $P_{pp}(\mathbf{r})$  se obtienen, respectivamente, a partir de la irradiancia detrás de un polarizador con el eje de transmisión orientado en la dirección  $s$  ó  $p$ ,  $P_{sp}(\mathbf{r})$  se determina a partir de las irradiancias detrás de un polarizador con el eje de transmisión formando  $45^\circ$  y  $135^\circ$  con la dirección  $s$  y por último,  $P_{sp}^*(\mathbf{r})$  se mide mediante el mismo procedimiento que  $P_{sp}(\mathbf{r})$  pero colocando una lámina  $\lambda/4$  delante del polarizador. Además, usando la desigualdad de Schwarz se demuestra que la matriz  $\hat{P}$  es semi-definida positiva.

En particular, para el campo dado por la Ec. (2.2) la matriz de polarización se escribe

$$\hat{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z) = \langle |E_0(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \begin{pmatrix} f^*(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) & f^*(\mathbf{r})g(\mathbf{r}) \\ g^*(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) & g^*(\mathbf{r})g(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Por último, comentar que cualquier campo parcialmente polarizado se puede escribir como suma de dos campos, uno totalmente polarizado y otro no polarizado, por tanto, la matriz de polarización que describe cualquier haz parcialmente polarizado también se puede descomponer en dos sumandos, uno de ellos será proporcional a la matriz identidad y representará a la componente no polarizada del campo ( $NP$ ), mientras que el otro término describirá a la componente totalmente

polarizada ( $TP$ ) [BW99]. Es decir,

$$\hat{P}(\mathbf{r}) = \hat{P}_{NP}(\mathbf{r}) + \hat{P}_{TP}(\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

### Grado de polarización local

A partir de los elementos de la matriz de polarización,  $\hat{P}$ , se define el grado de polarización local,  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ , que viene dado por [MM02, MM09]

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{[P_{ss}(\mathbf{r}) - P_{pp}(\mathbf{r})]^2 + 4|P_{sp}(\mathbf{r})|^2}{[P_{ss}(\mathbf{r}) + P_{pp}(\mathbf{r})]^2}}, \quad (2.7)$$

o equivalentemente, en términos de la traza ( $\text{tr}$ ) y el determinante ( $\det$ ) de la matriz  $\hat{P}$ , se escribe

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \sqrt{1 - 4 \frac{\det[\hat{P}(\mathbf{r})]}{\{\text{tr}[\hat{P}(\mathbf{r})]\}^2}}, \quad (2.8)$$

y proporciona el grado de polarización en cada punto,  $\mathbf{r}$ , del perfil transversal del haz. Por ser la matriz de polarización,  $\hat{P}$ , semi-definida positiva, el grado de polarización local,  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ , satisface la desigualdad  $0 \leq \mathcal{P}(\mathbf{r}) \leq 1$ . Si  $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = 1$ , el campo estará totalmente polarizado en dicho punto, mientras que si tenemos  $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = 0$  el campo será no polarizado en ese punto. En particular, para haces totalmente polarizados  $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = 1$  para todo  $\mathbf{r}$ , mientras que si la luz es no polarizada, se tiene  $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = 0$  para cualquier  $\mathbf{r}$ .

En particular, si se calcula el grado de polarización local para el campo dado por la Ec. (2.2) se obtiene que es igual a la unidad en cualquier punto  $\mathbf{r}$  de la sección transversal del haz.

### Azimut local y elipticidad local

Cuando la distribución de polarización de un haz no es uniforme es interesante estudiar cómo varían el azimuth y la elipticidad en la sección transversal. Para ello se define, en términos de los elementos de la matriz de polarización, el azimuth local,  $\psi(\mathbf{r})$ , esto es, el ángulo que forma el semieje mayor de la elipse de polarización con la dirección  $s$  en cada punto  $\mathbf{r}$ ,

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \Re\{P_{sp}(\mathbf{r})\}}{P_{ss}(\mathbf{r}) - P_{pp}(\mathbf{r})} \right), \quad (2.9)$$

cuyos valores están comprendidos en el intervalo  $0 \leq \psi(\mathbf{r}) < \pi$ . Y la elipticidad local,  $\chi(\mathbf{r})$ ,

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \arcsen \left( \frac{2 \Im\{P_{sp}(\mathbf{r})\}}{P_{ss}(\mathbf{r}) + P_{pp}(\mathbf{r})} \right). \quad (2.10)$$

con valores típicos  $-\pi/4 < \chi(\mathbf{r}) \leq \pi/4$  [MM02, MM09]. En particular, en puntos donde  $\chi(\mathbf{r}) = 0$  el estado de polarización será lineal, mientras que si  $\chi(\mathbf{r}) = \pm\pi/4$  la polarización será circular y el signo indica si es dextrógira (signo positivo) o levógira (signo negativo).

Nótese que si el haz es parcialmente polarizado, los elementos  $P_{jk}$  que aparecen en las expresiones anteriores son los elementos la matriz de polarización  $\hat{P}_{TP}$  que describe el estado de polarización local de la componente totalmente polarizada del campo.

### 2.2.3. Parámetros de Stokes locales

En vez de usar la matriz de polarización para caracterizar las propiedades de un campo eléctrico aleatorio, se pueden utilizar los parámetros de Stokes locales, que proporcionan la misma información que la matriz  $\hat{P}$ . Estos parámetros se pueden definir a partir de promedios temporales de las componentes transversales del campo eléctrico,  $E_s$  y  $E_p$ , como [MM09]

$$s_0(\mathbf{r}) = \langle |E_s(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle + \langle |E_p(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle, \quad (2.11a)$$

$$s_1(\mathbf{r}) = \langle |E_s(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle - \langle |E_p(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle, \quad (2.11b)$$

$$s_2(\mathbf{r}) = 2 \Re \langle E_s^*(\mathbf{r}, t) E_p(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (2.11c)$$

$$s_3(\mathbf{r}) = 2 \Im \langle E_s^*(\mathbf{r}, t) E_p(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (2.11d)$$

Usando las Ecs. (2.4) y (2.11) se obtienen las fórmulas que relacionan los parámetros de Stokes locales,  $s_i(\mathbf{r})$  con  $i = 0, 1, 2, 3$ , con los elementos de la matriz de polarización,  $P_{jk}(\mathbf{r})$  con  $j, k = s, p$

$$s_0(\mathbf{r}) = P_{ss}(\mathbf{r}) + P_{pp}(\mathbf{r}), \quad (2.12a)$$

$$s_1(\mathbf{r}) = P_{ss}(\mathbf{r}) - P_{pp}(\mathbf{r}), \quad (2.12b)$$

$$s_2(\mathbf{r}) = 2 \Re \{P_{sp}(\mathbf{r})\}, \quad (2.12c)$$

$$s_3(\mathbf{r}) = 2 \Im \{P_{sp}(\mathbf{r})\}, \quad (2.12d)$$

y equivalentemente

$$P_{ss}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [s_0(\mathbf{r}) + s_1(\mathbf{r})], \quad (2.13a)$$

$$P_{pp}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [s_0(\mathbf{r}) - s_1(\mathbf{r})], \quad (2.13b)$$

$$P_{sp}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [s_2(\mathbf{r}) + i s_3(\mathbf{r})], \quad (2.13c)$$

$$P_{ps}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [s_2(\mathbf{r}) - i s_3(\mathbf{r})]. \quad (2.13d)$$

Los parámetros de Stokes satisfacen la siguiente condición:

$$s_0^2(\mathbf{r}) \geq s_1^2(\mathbf{r}) + s_2^2(\mathbf{r}) + s_3^2(\mathbf{r}), \quad (2.14)$$

que es consecuencia de la semipositividad de  $\hat{P}$ . La igualdad se cumple si el haz es totalmente polarizado. En el formalismo de Stokes, el efecto que un sistema óptico polarizador produce sobre un campo puede describirse mediante una matriz  $4 \times 4$  denominada matriz de Müller (ver, por ejemplo [GO03]).

Los parámetros de Stokes son medibles y se pueden determinar en cada punto de la sección transversal del haz capturando, con una cámara CCD situada en el plano de observación, las irradiancias a la salida de un sistema de análisis formado por una lámina  $\lambda/4$  y un polarizador lineal. En tal caso [BW99, MM09],

$$s_0(\mathbf{r}) = I_{0^\circ}(\mathbf{r}) + I_{90^\circ}(\mathbf{r}), \quad (2.15a)$$

$$s_1(\mathbf{r}) = I_{0^\circ}(\mathbf{r}) - I_{90^\circ}(\mathbf{r}), \quad (2.15b)$$

$$s_2(\mathbf{r}) = I_{45^\circ}(\mathbf{r}) - I_{135^\circ}(\mathbf{r}), \quad (2.15c)$$

$$s_3(\mathbf{r}) = I_{\lambda/4, 45^\circ}(\mathbf{r}) - I_{\lambda/4, 135^\circ}(\mathbf{r}). \quad (2.15d)$$

donde  $I_\theta(\mathbf{r})$  y  $I_{\lambda/4, \theta}(\mathbf{r})$  representan la irradiancia en cada punto de la sección transversal del haz y los subíndices se refieren al ángulo,  $\theta$ , que forma el eje de transmisión del polarizador con la dirección  $s$  y a la presencia o no de la lámina  $\lambda/4$  en el momento en que se realiza la medida. El primer parámetro de Stokes local,  $s_0(\mathbf{r})$ , proporciona la irradiancia del haz en el punto  $\mathbf{r}$ . El segundo,  $s_1(\mathbf{r})$ , es igual a la diferencia entre la cantidad de luz linealmente polarizada a

$0^\circ$  y la cantidad de luz linealmente polarizada a  $90^\circ$  contenidas en el punto  $\mathbf{r}$ . El significado del parámetro  $s_2(\mathbf{r})$  es análogo al de  $s_1$  pero considerando estados lineales de polarización a  $45^\circ$  y  $135^\circ$ . Por último,  $s_3(\mathbf{r})$  proporciona el exceso de polarización circular a derechas respecto de polarización circular a izquierdas en dicho punto  $\mathbf{r}$ . Usando los parámetros de Stokes locales es posible obtener la distribución de polarización en la sección transversal del haz.

### Grado de polarización, azimuth y elipticidad locales

A partir de los parámetros anteriores (Ecs. (2.15a)-(2.15d)) se puede calcular el grado de polarización local,  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ , utilizando la expresión [MM09]

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{s_1^2(\mathbf{r}) + s_2^2(\mathbf{r}) + s_3^2(\mathbf{r})}{s_0^2(\mathbf{r})}}. \quad (2.16)$$

así como, el azimuth y la elipticidad en cada punto,  $\mathbf{r}$ , de la sección transversal del haz [MM09]

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{s_2(\mathbf{r})}{s_1(\mathbf{r})} \right), \quad (2.17)$$

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{s_3(\mathbf{r})}{s_0(\mathbf{r})} \right). \quad (2.18)$$

## 2.3. Caracterización global

En la sección anterior, el problema de la caracterización de la polarización de un haz parcialmente y no uniformemente polarizado (PNUP) se ha enfocado desde el punto de vista local, usando distintas representaciones de la polarización. Desde el punto de vista experimental, la caracterización local supone trabajar con matrices de datos. Por esta razón, resulta útil definir parámetros globales que proporcionen información sobre la polarización del haz a través de un único valor, un escalar. A continuación se introducen los parámetros globales que se utilizan en los capítulos siguientes para caracterizar tanto haces completamente coherentes como haces parcialmente coherentes, donde por coherencia se entiende coherencia espacial, en su sección transversal.

### 2.3.1. Grado de polarización ponderado

A partir del grado de polarización local,  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ , se define el grado de polarización ponderado,  $\tilde{\mathcal{P}}$ , como [PM99a, MM02, MM09]

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{\iint \mathcal{P}(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (2.19)$$

donde  $I(\mathbf{r}) = s_0(\mathbf{r})$  es la irradiancia del haz en cada punto del plano de observación. El parámetro  $\tilde{\mathcal{P}}$  proporciona el valor promedio del grado de polarización local,  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ , determinado sobre los puntos de la sección transversal del haz donde la irradiancia es significativa. La presencia del factor  $I(\mathbf{r})$  en la definición de  $\tilde{\mathcal{P}}$  minimiza la contribución de las “colas” del haz al promedio, de forma que se reduce la influencia de efectos indeseables en el proceso de medida tales como el “offset” de la cámara, el ruido de fondo, etc. Si el valor del parámetro  $\tilde{\mathcal{P}}$  es cercano a la unidad, se puede decir que, al menos en la región donde la irradiancia es significativa, el haz es totalmente polarizado, aunque la distribución (espacial) de estados de polarización puede ser no uniforme. Si por el contrario  $\tilde{\mathcal{P}} = 0$  se puede afirmar que el haz es no-polarizado. Valores intermedios de  $\tilde{\mathcal{P}}$  se pueden corresponder con haces parcialmente polarizados, en general, no-uniformemente, o con haces con estado de polarización no-uniforme donde parte de la distribución de la polarización es no-polarizada y parte totalmente polarizada ( $0 \leq \tilde{\mathcal{P}} \leq 1$ ). En general,  $\tilde{\mathcal{P}}$  no es invariante en propagación a través de sistemas ópticos de primer orden.

Para haces de tipo PNUP es interesante calcular la dispersión del parámetro anterior,  $\sigma_{\mathcal{P}}^2$ , ya que da idea de la uniformidad del grado de polarización local,  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ , en el perfil transversal del haz. En la región del haz donde la irradiancia es significativa, la varianza de  $\tilde{\mathcal{P}}$  viene dada por

$$\sigma_{\mathcal{P}}^2 = \frac{\iint [\mathcal{P}(\mathbf{r}) - \tilde{\mathcal{P}}]^2 I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}. \quad (2.20)$$

Se puede demostrar fácilmente que  $0 \leq \sigma_{\mathcal{P}} \leq 1/2$ , por tanto, valores de  $\sigma_{\mathcal{P}}$

próximos a cero indican que el grado de polarización local es uniforme, aunque la distribución de estados de polarización puede ser no uniforme.

### 2.3.2. Contenido circular

Para completar la información que proporciona el grado de polarización ponderado, se puede usar otro parámetro global que mide el contenido de luz polarizada circularmente en haces TNUP [MM06, MM09].

El campo eléctrico de cualquier haz totalmente y no-uniformemente polarizado,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , puede escribirse en la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_D(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_I(\mathbf{r}) = (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_D)\mathbf{u}_D + (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_I)\mathbf{u}_I, \quad (2.21)$$

donde  $\mathbf{u}_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{u}_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  son dos vectores de Jones unitarios y ortogonales, los subíndices “ $D$ ” e “ $I$ ” se refieren, respectivamente, a luz circularmente polarizada a derechas o a izquierdas y el punto, “ $\cdot$ ”, se utiliza para representar el producto escalar. Teniendo esto en cuenta, el vector  $\mathbf{E}_D(\mathbf{r}) = (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_D)\mathbf{u}_D$  podría interpretarse como el campo a la salida de un dispositivo óptico que únicamente transmite la componente circularmente polarizada a derechas del campo de entrada.

El porcentaje de la irradiancia total del haz transmitida por dicho dispositivo es

$$\alpha_D(\mathbf{r}) = \frac{\langle |\mathbf{E}_D(\mathbf{r})|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \rangle} = \frac{s_0(\mathbf{r}) + s_3(\mathbf{r})}{2s_0(\mathbf{r})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{s_3(\mathbf{r})}{s_0(\mathbf{r})}, \quad (2.22)$$

donde  $s_i(\mathbf{r})$  con  $i = 0, 3$  son los parámetros de Stokes locales. Promediando en la región de la sección transversal del haz donde la irradiancia es significativa resulta

$$\tilde{\alpha}_D = \frac{\int \alpha_D(\mathbf{r}) s_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\int s_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (2.23)$$

expresión que proporciona el contenido de luz circularmente polarizada a derechas en la sección transversal del haz. Trabajando con la componente del campo circularmente polarizada a izquierdas se obtiene una expresión análoga. Es decir, el porcentaje de la irradiancia total del haz a la salida de un dispositivo óptico que

sólo transmitiese la componente circularmente polarizada a izquierdas en función de  $s_0(\mathbf{r})$  y  $s_3(\mathbf{r})$  es

$$\alpha_I(\mathbf{r}) = \frac{\langle |\mathbf{E}_I(\mathbf{r})|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \rangle} = \frac{s_0(\mathbf{r}) - s_3(\mathbf{r})}{2s_0(\mathbf{r})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{s_3(\mathbf{r})}{s_0(\mathbf{r})}, \quad (2.24)$$

y promediando en la región de la sección transversal del haz donde la irradiancia es significativa se tiene

$$\tilde{\alpha}_I = \frac{\int \alpha_I(\mathbf{r}) s_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\int s_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (2.25)$$

expresión que proporciona el contenido de luz circularmente polarizada a izquierdas en el haz.

Para simplificar los cálculos se define [MM06, MM09]

$$\tilde{\rho}_c = \frac{\iint \rho_c(\mathbf{r}) s_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint s_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (2.26)$$

donde

$$\rho_c(\mathbf{r}) = \frac{s_3(\mathbf{r})}{s_0(\mathbf{r})}. \quad (2.27)$$

Nótese que  $\tilde{\alpha}_D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tilde{\rho}_c$  y  $\tilde{\alpha}_I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tilde{\rho}_c$ .

El parámetro  $\tilde{\rho}_c$  proporciona el contenido de luz circularmente polarizada del haz y puede tomar valores comprendidos entre  $-1$  (haces circularmente polarizados a izquierdas puros) y  $1$  (haces circularmente polarizados a derechas puros). La dispersión de los valores de  $\rho_c(\mathbf{r})$  caracteriza la uniformidad del contenido circular del haz y se define

$$\sigma_c^2 = \frac{\iint [\rho_c(\mathbf{r}) - \tilde{\rho}_c]^2 s_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint s_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}. \quad (2.28)$$

En particular, para un haz linealmente polarizado, en general, no uniformemente, en todos los puntos de su sección transversal se obtendrá  $\tilde{\rho}_c = 0$  y  $\sigma_c = 0$ , éste es el caso de los haces radialmente ó azimutalmente polarizados (ver fig 2.2) así como de los haces espiralmente polarizados [YB00, GO01, ZL02, BS05, GO08,



HL08,RP09]. Mientras que si un haz presenta igual contenido de luz circularmente polarizada a izquierdas que a derechas se espera que  $\tilde{\rho}_c$  sea nulo y  $\sigma_p \neq 0$ . Usando el parámetro  $\tilde{\rho}_c$  no es posible distinguir entre haces radialmente, azimutalmente o espiralmente polarizados, por esta razón, en la siguiente sección se introducen dos parámetros,  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$ , que permiten distinguirlos. Sin embargo, cuando se pretende sintetizar experimentalmente haces linealmente y no uniformemente polarizados el parámetro  $\tilde{\rho}_c$  es especialmente útil ya que permite comprobar si efectivamente se ha obtenido una distribución de polarización lineal.

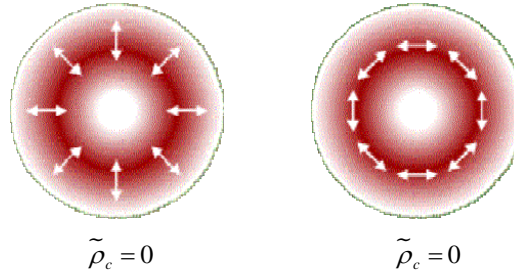


Figura 2.2: Ejemplos de haces no uniformemente polarizados con contenido de polarización circular nulo.

El parámetro  $\tilde{\rho}_c$  es invariante en propagación y su valor se puede determinar experimentalmente a partir de los parámetros de Stokes locales [MM06]. Como este parámetro se usará para caracterizar los haces sintetizados en esta tesis es conveniente introducir el método de calibración y medida del mismo. Para medir los parámetros de Stokes en cada punto de la sección transversal del haz se recurre al procedimiento habitual, esto es, situar una cámara CCD (modelo Pulnix TM-765) en el plano de observación y registrar la irradiancia del haz a la salida de un sistema de análisis compuesto por una lámina de fase de cuarto de onda y un polarizador lineal con eje de transmisión orientado a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $135^\circ$  respecto al eje paralelo a la componente  $s$  del campo. El polarizador lineal que se ha utilizado posee un coeficiente de extinción  $T_1/T_2 = 250$  y la lámina  $\lambda/4$  un coeficiente de transmisión  $T_3 = 0.98$ . Las imágenes se visualizan y almacenan en el ordenador utilizando un analizador de haz (marca SPIRICON, modelo LBA-100A). A continuación, mediante un programa elaborado con el software MathCad se calculan

los parámetros de Stokes locales a partir de las expresiones (2.15a)-(2.15d). Un esquema del sistema experimental que se ha utilizado para medir  $\tilde{\rho}_c$  se muestra en la Fig. 2.3.

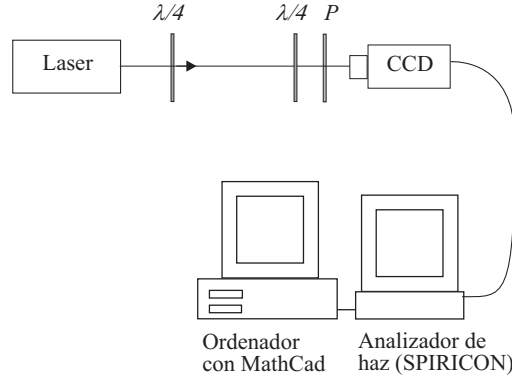


Figura 2.3: Sistema experimental diseñado para la calibración del método de medida de  $\tilde{\rho}_c$ .

Para calibrar el método de medida se usa un láser continuo de He-Ne (Spectra Physics, modelo 117A) estabilizado en intensidad y frecuencia que emite en el modo fundamental  $TEM_{00}$  con  $\lambda = 632.8$  nm, con potencia  $P \simeq 1$  mW y linealmente polarizado en la dirección  $p$ . Para este haz de referencia, se han obtenido  $\tilde{\rho}_c = 0.0043$  y  $\sigma_c^2 = 0.0001$ , valores que coinciden con los que se esperan para un haz uniformemente y linealmente polarizado. Tras llevar a cabo la calibración del método se pueden sintetizar haces circularmente polarizado a izquierdas o a derechas puros haciendo pasar el haz linealmente polarizado a través de una lámina  $\lambda/4$  y en tal caso, se obtuvo  $\tilde{\rho}_c = -1.008$  y  $\sigma_c^2 = 0.001$  ó  $\tilde{\rho}_c = 1.081$  y  $\sigma_c^2 = 0.001$ , respectivamente [MM06]. Estos resultados prueban la funcionalidad de estos parámetros.

Por otro lado, de la definición de  $\tilde{\rho}_c$  se desprende que su valor también se puede obtener, incluso en el caso de haces NUP, midiendo los parámetros de Stokes  $s_0$  y  $s_3$  integrados a todo el área de detección (ver Ec. (2.26)).

### 2.3.3. Contenido radial y azimutal

En la actualidad los haces cuya distribución de polarización posee simetría rotacional, en particular, los haces radialmente o azimutalmente polarizados, están recibiendo gran atención debido a su utilidad en numerosas aplicaciones y campos de la física (ver por ejemplo [ZH09] y las referencias incluídas en él). En ellos interesa conocer la pureza en el contenido de polarización de tipo radial o azimutal en un determinado plano, para ello se presentan en esta sección varios parámetros globales que permiten determinar dichos contenidos en la región del frente de onda donde la irradiancia no es despreciable.

De forma análoga a la descomposición del campo eléctrico en sus componentes circular a derechas y a izquierdas que se hizo en la Sec. 2.3.2 (ver Ec. (2.21)), el campo  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  también se puede descomponer en sus componentes radial y azimutal en la forma,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_R(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_A(\mathbf{r}) = (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_R)\mathbf{u}_R + (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_A)\mathbf{u}_A, \quad (2.29)$$

donde el punto denota producto escalar y  $\mathbf{u}_R = (\cos \theta, \sin \theta)$  y  $\mathbf{u}_A = (-\sin \theta, \cos \theta)$  son dos vectores unitarios ortogonales en las direcciones radial y azimutal, respectivamente. Cada término de la Eq. (2.29) representa el campo a la salida de un dispositivo óptico que sólo transmite la componente radial o azimutal del campo de entrada. De acuerdo con esto,  $\mathbf{E}_R$  representa un campo radialmente polarizado y  $\mathbf{E}_A$  un campo polarizado azimutalmente.

En cada punto de la sección transversal del haz, el porcentaje de la irradiancia asociada a la componente radial del campo puede obtenerse a través del siguiente cociente,

$$\rho_R(\mathbf{r}) = \frac{\langle |\mathbf{E}_R(\mathbf{r})|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \rangle}, \quad (2.30a)$$

análogamente, para la componente azimutal,

$$\rho_A(\mathbf{r}) = \frac{\langle |\mathbf{E}_A(\mathbf{r})|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \rangle}, \quad (2.30b)$$

donde los corchetes indican promedio temporal y  $\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \rangle = I(\mathbf{r})$  es la irradiancia en cada punto de la sección transversal.

El contenido de polarización de tipo radial o azimutal en la sección transversal de un haz totalmente y no uniformemente polarizado se obtiene promediando las expresiones (2.30a) y (2.30b) sobre la región del perfil del haz donde la irradiancia es significativa,

$$\tilde{\rho}_R = \frac{\iint \rho_R(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (2.31a)$$

$$\tilde{\rho}_A = \frac{\iint \rho_A(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (2.31b)$$

donde  $I(\mathbf{r})$  actúa como función peso. Nótese que  $0 \leq \tilde{\rho}_i \leq 1$  con  $i = R, A$ , de forma que valores de  $\tilde{\rho}_R$  o  $\tilde{\rho}_A$  iguales a la unidad se asocian a haces radialmente o azimutalmente polarizados puros. Además se satisface la relación  $\tilde{\rho}_R + \tilde{\rho}_A = 1$ , es decir, los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  son complementarios.

La dispersión de los valores  $\rho_R(\mathbf{r})$  y  $\rho_A(\mathbf{r})$  respecto de sus valores medios,  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$ , viene dada por:

$$\sigma_R^2 = \frac{\iint (\rho_R(\mathbf{r}) - \tilde{\rho}_R)^2 I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (2.32a)$$

$$\sigma_A^2 = \frac{\iint (\rho_A(\mathbf{r}) - \tilde{\rho}_A)^2 I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}. \quad (2.32b)$$

Los parámetros  $\sigma_R^2$  y  $\sigma_A^2$  representan la varianza de  $\rho_R$  y  $\rho_A$ . Por tanto,  $\sigma_R^2$  y  $\sigma_A^2$  caracterizan la uniformidad de la distribución de polarización en un plano perpendicular a la dirección de propagación del haz.

Para expresar  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  en función de los parámetros de Stokes locales las componentes radial y azimutal del campo dado por la Ec. (2.2) se escriben en coordenadas radiales,  $\mathbf{r} = (r, \theta)$ , como sigue

$$\mathbf{E}_R(r, \theta) = (\mathbf{E}(r, \theta) \cdot \mathbf{u}_R) \mathbf{u}_R = E_0(r, \theta) [f(r, \theta) \cos \theta + g(r, \theta) \sin \theta] \mathbf{u}_R, \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{E}_A(r, \theta) = (\mathbf{E}(r, \theta) \cdot \mathbf{u}_A) \mathbf{u}_A = E_0(r, \theta) [f(r, \theta) \cos \theta + g(r, \theta) \sin \theta] \mathbf{u}_A, \quad (2.33b)$$

donde por comodidad no se ha escrito la dependencia de  $E_0$  con el tiempo,  $t$ . A partir de los parámetros de Stokes locales, calculados para dicho campo,

$$s_0(r, \theta) = \langle |E_0(r, \theta)|^2 \rangle (|f(r, \theta)|^2 + |g(r, \theta)|^2), \quad (2.34a)$$

$$s_1(r, \theta) = \langle |E_0(r, \theta)|^2 \rangle (|f(r, \theta)|^2 - |g(r, \theta)|^2), \quad (2.34b)$$

$$s_2(r, \theta) = 2 \langle |E_0(r, \theta)|^2 \rangle \Re\{f^*(r, \theta)g(r, \theta)\}, \quad (2.34c)$$

$$s_3(r, \theta) = 2 \langle |E_0(r, \theta)|^2 \rangle \Im\{f^*(r, \theta)g(r, \theta)\}, \quad (2.34d)$$

se obtiene

$$\langle |\mathbf{E}_R(r, \theta)|^2 \rangle = \frac{1}{2} s_0(r, \theta) + \frac{\cos 2\theta}{2} s_1(r, \theta) + \frac{\sin 2\theta}{2} s_2(r, \theta), \quad (2.35a)$$

$$\langle |\mathbf{E}_A(r, \theta)|^2 \rangle = \frac{1}{2} s_0(r, \theta) - \frac{\cos 2\theta}{2} s_1(r, \theta) - \frac{\sin 2\theta}{2} s_2(r, \theta). \quad (2.35b)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior y recurriendo a las Ecs. (2.30) y (2.31),  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  se expresan

$$\tilde{\rho}_R = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 I_T} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [\cos(2\theta) s_1(r, \theta) + \sin(2\theta) s_2(r, \theta)] r dr d\theta, \quad (2.36a)$$

$$\tilde{\rho}_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 I_T} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [\cos(2\theta) s_1(r, \theta) + \sin(2\theta) s_2(r, \theta)] r dr d\theta, \quad (2.36b)$$

donde

$$I_T = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} s_0(r, \theta) r dr d\theta, \quad (2.37)$$

es la potencia total del haz. Las Ecs. (2.36a) y (2.36b) ponen en evidencia la utilidad, desde el punto de vista experimental, de los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  ya que pueden determinarse a partir de los parámetros de Stokes locales,  $s_i(r, \theta)$  con  $i = 0, 1, 2$ . Dichas expresiones son independientes del parámetro  $s_3$ , de donde se deduce que para conocer el contenido de polarización radial y azimutal en el haz no es necesario determinar tal parámetro. En particular,  $s_3$  debe ser nulo en

todos los puntos  $(r, \theta)$  de la sección transversal de cualquier haz radialmente o azimutalmente polarizado.

Estos parámetros como se verá en el capítulo 3 y 7 son especialmente útiles para caracterizar haces espiralmente polarizados tanto completamente coherentes como parcialmente coherentes.

Por otra parte, nótese que los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  también se pueden determinar, respectivamente, a partir de medidas integradas de la irradiancia a la salida de un polarizador radial o azimutal. De hecho, se puede demostrar que

$$\tilde{\rho}_R = \frac{1}{I_T} \iint \langle |\mathbf{E}_R(\mathbf{r})|^2 \rangle d\mathbf{r}, \quad (2.38a)$$

donde  $|\mathbf{E}_R(\mathbf{r})|^2$  representa la irradiancia local a la salida de un polarizador radial, y análogamente,

$$\tilde{\rho}_A = \frac{1}{I_T} \iint \langle |\mathbf{E}_A(\mathbf{r})|^2 \rangle d\mathbf{r}, \quad (2.38b)$$

siendo  $|\mathbf{E}_A(\mathbf{r})|^2$  la irradiancia local a la salida de un polarizador azimutal.

Por tanto, el numerador de las Ecs. (2.38a) y (2.38b) proporciona, respectivamente, la irradiancia asociada a la componente radial o azimutal del campo integrada en el área de la sección transversal del haz. Para poder medir directamente los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  es necesario eliminar la componente azimutal,  $\mathbf{E}_A$ , o la componente radial,  $\mathbf{E}_R$ , del campo usando, según convenga, un polarizador dicróico radial o uno azimutal. Tales polarizadores se comportan de forma análoga a un polarizador lineal pero con ejes de transmisión orientados radialmente o azimutalmente.

### Calibración del método de medida

Los parámetros globales  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  se pueden determinar experimentalmente a partir de los parámetros de Stokes locales. En primer lugar, tal y como se hizo con  $\tilde{\rho}_c$ , se debe calibrar el método de medida propuesto utilizando un haz de referencia. Para llevar a cabo dicha calibración se utiliza un sistema experimental análogo al que se usó en la sección anterior para determinar  $\tilde{\rho}_c$  pero ahora en la

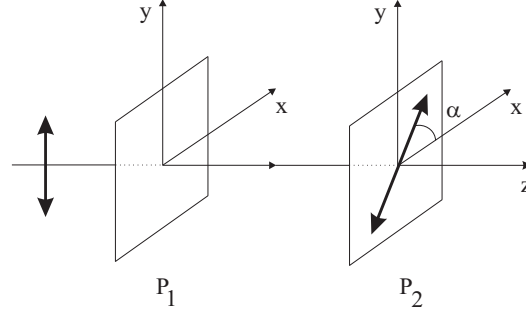


Figura 2.4: Sistema experimental diseñado para la medida de  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$ .

Fig. 2.3 se sustituye la primera lámina  $\lambda/4$  por un polarizador lineal,  $P_1$ . El haz de referencia se sintetiza usando como fuente un láser Spectra Physics de He-Ne que emite un haz Gaussiano linealmente y uniformemente polarizado. Para fijar el azimut de este haz en la dirección vertical se ha utilizado un polarizador lineal convencional,  $P_1$ , cuyo coeficiente de extinción es, de acuerdo con las especificaciones de fabricación,  $T_1/T_2 = 250$ . A partir de los datos experimentales se obtiene  $\tilde{\rho}_R = \tilde{\rho}_A = 0.499$ . De modo que los resultados experimentales concuerdan con las predicciones teóricas  $\tilde{\rho}_R = \tilde{\rho}_A = 0.5$ .

### Síntesis y caracterización de haces con distribución de polarización radial o azimutal

Una vez calibrado el método de medida, se han generado en el laboratorio dos haces linealmente y no uniformemente polarizados y se han calculado los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$ . Para sintetizarlos se ha reemplazado el polarizador lineal que se utilizaba en la calibración por un convertidor de polarización (modelo Arcoptix) basado en un dispositivo de cristal-líquido que permite obtener distribuciones de polarización de tipo radial y azimutal a partir de un haz de entrada linealmente y uniformemente polarizado [SS96].

Si se observa la distribución de irradiancia a la salida del convertidor (ver Fig. 2.5 (a) (modo radial) y Fig. 2.5 (b) (modo azimutal)), en ambos casos, presenta un nulo en el centro que se corresponde con una pequeña región del dispositivo donde la orientación de las moléculas de cristal líquido no está bien

definida (detalles en Ref. [SS96]). Sin embargo, la influencia que esta imperfección del dispositivo tiene en los valores de los parámetros globales  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  es despreciable, al menos tal y como se ha diseñado el experimento puesto que las distancias de propagación son pequeñas.

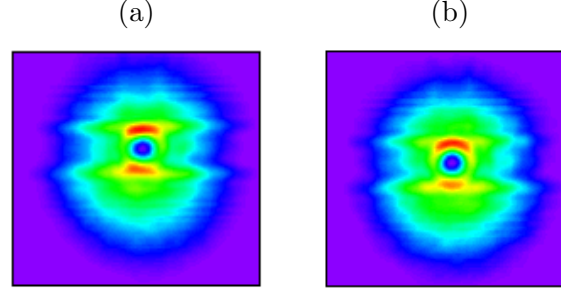


Figura 2.5: Irradiancia del haz a de salida del convertidor de polarización: (a) convertidor en modo radial, (b) convertidor en modo azimutal.

En primer lugar se considera el haz generado con el convertidor de polarización en modo radial. En la Fig. 2.6 se han representado las irradiancias experimentales a la salida del polarizador auxiliar,  $P_2$ , para diferentes orientaciones de su eje de transmisión ( $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  y  $135^\circ$  respecto al eje  $x$ ) que se corresponden con las irradiancias que se necesitan para determinar los parámetros de Stokes locales. Se observa que el número de lóbulos y la orientación de los mismos se ajustan a las predicciones teóricas (ver Fig. 2.7). En la tabla 2.1 se muestran los valores experimentales de  $\tilde{\rho}_R$ ,  $\tilde{\rho}_A$  y de sus varianzas  $\sigma_R^2$  y  $\sigma_A^2$  que se han obtenido para este haz y se comparan con los valores teóricos. Los resultados de la tabla confirman que efectivamente el haz sintetizado es radialmente polarizado.

Se ha realizado el mismo experimento utilizando el convertidor en modo azimutal. Como en el caso anterior, a partir de los datos experimentales se han calculado los parámetros globales  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$ , los valores experimentales se comparan con los teóricos en la tabla 2.2. Estos resultados junto con las irradiancias mostradas en la Fig. 2.8 confirman que la distribución de polarización del haz generado es azimutal.



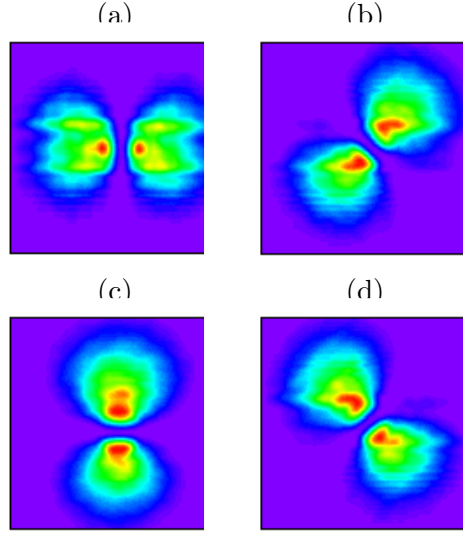


Figura 2.6: Irradiancias experimentales detrás del polarizador: (a)  $I_{0^\circ}$ , (b)  $I_{45^\circ}$ , (c)  $I_{90^\circ}$  y (d)  $I_{135^\circ}$ , caso del convertidor en modo radial.

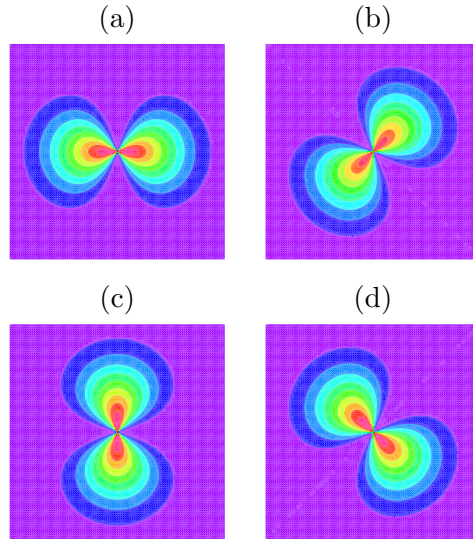


Figura 2.7: Irradiancias teóricas detrás del polarizador: (a)  $I_{0^\circ}$ , (b)  $I_{45^\circ}$ , (c)  $I_{90^\circ}$  y (d)  $I_{135^\circ}$ , caso del convertidor en modo radial.

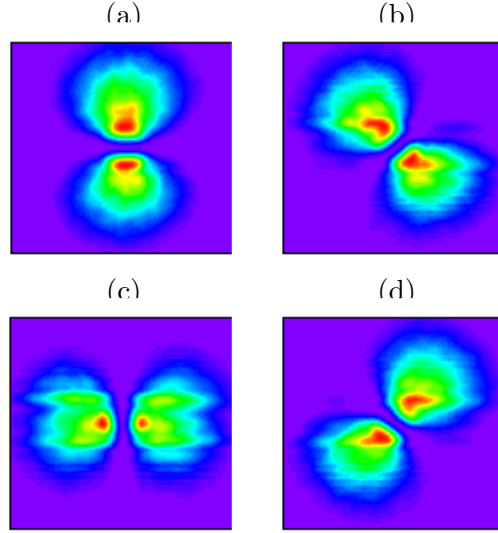


Figura 2.8: Irradiancias experimentales detrás del polarizador: (a)  $I_{0^\circ}$ , (b)  $I_{45^\circ}$ , (c)  $I_{90^\circ}$  y (d)  $I_{135^\circ}$ , caso del convertidor en modo azimutal.

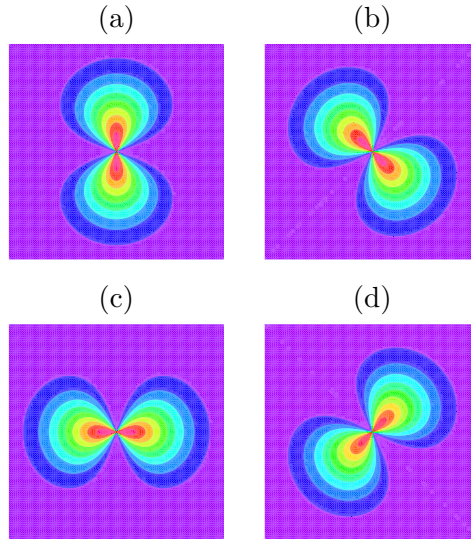


Figura 2.9: Irradiancias teóricas detrás del polarizador: (a)  $I_{0^\circ}$ , (b)  $I_{45^\circ}$ , (c)  $I_{90^\circ}$  y (d)  $I_{135^\circ}$ , caso del convertidor en modo azimutal.

Tabla 2.1: Valores experimentales y teóricos de los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  para un haz radial.

Haz radial	$\tilde{\rho}_R$	$\sigma_R^2$	$\tilde{\rho}_A$	$\sigma_A^2$
Experimentales	0.986	0.009	0.014	0.009
Teóricos	1	0	0	0

Tabla 2.2: Valores experimentales y teóricos de los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  para un haz azimutal.

Haz azimutal	$\tilde{\rho}_R$	$\sigma_R^2$	$\tilde{\rho}_A$	$\sigma_A^2$
Experimentales	0.012	0.007	0.988	0.007
Teóricos	0	0	1	0

#### 2.3.4. Parámetro de calidad

Los parámetros anteriores son útiles para estudiar globalmente las características de polarización de un haz de luz, que en general podrá ser parcialmente coherente y parcialmente polarizado. Por otro lado, es interesante estudiar desde el punto de vista global la estructura espacial del haz teniendo en cuenta la polarización del mismo. En la literatura se han propuesto diversos parámetros para caracterizar espacialmente los haces de luz, y finalmente se ha adoptado como estándar el formalismo de los momentos de intensidad. Utilizando este formalismo se ha definido el parámetro de calidad,  $Q$ . El estudio del parámetro de calidad y la optimización del mismo ha constituido, desde 1991, una de las líneas de investigación del grupo “*Óptica Física y Haces láser*” y se han publicado numerosos trabajos con los resultados más relevantes derivados de tales estudios. En esta sección se resumen las características más significativas del parámetro de calidad,  $Q$ .

Los momentos de segundo orden permiten caracterizar globalmente la estructura espacial de un haz de luz. En términos de las componentes del vector de Jones del campo eléctrico se definen [LP88, BA89, SI90, SM91, MM92, WE92,

PM93, SI93, PM94, LD95, MP95, PM99b, MM02, PS02, LL03, MP04],

$$\langle \alpha \beta \rangle_{ij} = \frac{1}{I_{ij}} \frac{k^2}{4\pi^2} \iiint \alpha \beta \langle E_i^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}/2, z) E_j(\mathbf{r} - \mathbf{s}/2, z) \rangle \exp(i\mathbf{k}\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\mathbf{s} d\mathbf{r} d\boldsymbol{\eta}, \quad (2.39)$$

con

$$I_{ij} = \int \langle E_i^*(\mathbf{r}, z; t) E_j(\mathbf{r}, z; t) \rangle d\mathbf{r}, \quad (2.40)$$

donde  $\alpha, \beta = x, y, u, v$ ,  $E_i$  y  $E_j$  con  $i, j = s, p$  representan las componentes transversales del campo (ortogonales a la dirección de propagación de haz  $z$ ),  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ ,  $\mathbf{s} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  con  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  dos puntos de la sección transversal y donde  $\boldsymbol{\eta} = (u, v)$  son los ángulos de propagación del haz (sin considerar las ondas evanescentes del campo),  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda siendo  $\lambda$  la longitud de onda del haz y los paréntesis  $\langle \rangle$  indican promedio temporal. Las irradiancias asociadas a las componentes transversales del campo son  $I_{ss} = I_s$  e  $I_{pp} = I_p$ , respectivamente, y se cumple que la irradiancia total del haz es  $I_T = I_s + I_p$ .

Considerando la naturaleza vectorial de la luz, el parámetros de calidad,  $Q$ , del haz se define [LD95, PM99b, MM02, MP04]

$$Q = \langle r^2 \rangle \langle \eta^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle^2, \quad (2.41)$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y)$  y  $\boldsymbol{\eta} = (u, v)$  son, respectivamente, las coordenadas cartesianas en las dos regiones consideradas, esto es, en campo cercano y en campo lejano. Por otro lado, las cantidades  $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle$  y  $\langle \eta^2 \rangle = \langle u^2 + v^2 \rangle$  son proporcionales a la anchura y a la divergencia del haz respectivamente. Mientras que el término  $\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle xu + yv \rangle$  está relacionado con el radio de curvatura del frente de onda del haz y es nulo en el plano de la cintura, es decir, en el plano donde la anchura del haz es mínima. El parámetro de calidad  $Q$  proporciona información sobre la capacidad de un haz para estar, simultáneamente, enfocado en campo cercano y colimado en campo lejano. Este parámetro toma los valores  $Q \geq 1/k^2$  obteniéndose el valor mínimo en el caso de los haces gaussianos. Además,  $Q$  es invariante a través de sistemas ABCD rotacionalmente simétricos, como por ejemplo, tramos de propagación libre o lentes esféricas. Por último, nótese que el significado físico del parámetro  $Q$  es análogo al del factor de propagación  $M^2$  [SI90], ya que ambos se relacionan a través de la expresión  $(M^2)^2 = k^2 Q$ .

En función de las componentes transversales del campo,  $s$  y  $p$ , los momentos de segundo orden involucrados en la definición del parámetro de calidad pueden descomponerse de la siguiente forma:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{I_s}{I} \langle r^2 \rangle_s + \frac{I_p}{I} \langle r^2 \rangle_p, \quad (2.42a)$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{I_s}{I} \langle \eta^2 \rangle_s + \frac{I_p}{I} \langle \eta^2 \rangle_p, \quad (2.42b)$$

$$\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle = \frac{I_s}{I} \langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle_s + \frac{I_p}{I} \langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle_p, \quad (2.42c)$$

de manera que, en términos de las calidades asociadas a las componentes transversales del campo,  $Q_s$  y  $Q_p$ , el parámetro  $Q$  se escribe

$$Q = \frac{I_s^2}{I^2} Q_s + \frac{I_p^2}{I^2} Q_p + \frac{I_s I_p}{I^2} Q_{sp}, \quad (2.43)$$

donde

$$Q_i = \langle r^2 \rangle_i \langle \eta^2 \rangle_i - \langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle_i^2, \quad i = s, p, \quad (2.44a)$$

y

$$Q_{sp} = \langle r^2 \rangle_s \langle \eta^2 \rangle_p + \langle r^2 \rangle_p \langle \eta^2 \rangle_s - 2 \langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle_s \langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} \rangle_p. \quad (2.44b)$$

El parámetro  $Q$  se utilizará en los capítulos 3 y 4 para caracterizar globalmente la estructura espacial de los haces TNUP sintetizados.

### 2.3.5. Parámetro de kurtosis

Otro parámetro que, desde el punto de vista global, resulta ser útil para caracterizar la estructura espacial de la luz es el parámetro de kurtosis,  $K$ , que se define a partir de momentos de orden superior como sigue [WE92, PM93, MP95, PS02],

$$K = \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2}, \quad (2.45)$$

donde

$$\langle x^4 \rangle = \frac{I_s}{I} \langle x^4 \rangle_s + \frac{I_p}{I} \langle x^4 \rangle_p, \quad (2.46a)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{I_s}{I} \langle x^2 \rangle_s + \frac{I_p}{I} \langle x^2 \rangle_p, \quad (2.46b)$$

y los momentos involucrados en la las Ecs. (4.18) vienen dados por,

$$\langle x^2 \rangle_i = \frac{1}{I_i} \int x^2 \langle E_i^*(x, z; t) E_i(x, z; t) \rangle dx, \quad (2.47a)$$

$$\langle x^4 \rangle_i = \frac{1}{I_i} \int x^4 \langle E_i^*(x, z; t) E_i(x, z; t) \rangle dx, \quad (2.47b)$$

con

$$I_i = \int \langle E_i^*(x, z; t) E_i(x, z; t) \rangle dx, \quad (2.48)$$

con  $i = s, p$ .  $K$  proporciona información sobre el grado de aplanamiento del haz, de forma que, cualquier perfil de irradiancia se puede clasificar en leptocúrtico, mesocúrtico o platicúrtico, en función de si  $K$  es mayor, igual o menor que 3, valor que toma la curtosis para un haz gaussiano ( $K_g$ ). De acuerdo con esto, los perfiles leptocúrticos y platicúrticos son, respectivamente, más o menos aplanados que el perfil gaussiano como se puede apreciar en la Fig. 2.10

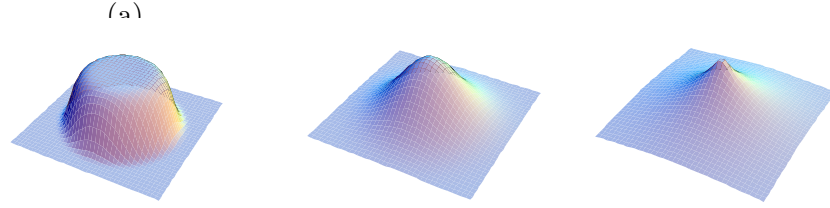


Figura 2.10: Tipos de perfiles de irradiancia en función del valor de  $K$ : (a) platicúrtico ( $K < 3$ ), (b) mesocúrtico ( $K = 3$ ), (c) leptocúrtico ( $K > 3$ ).

El parámetro de kurtosis se utiliza en el capítulo 4 para describir el grado de aplanamiento del perfil de irradiancia asociado a haces sobre los que se ha realizado conformado global.



## Capítulo 3

# Síntesis de haces totalmente y no-uniformemente polarizados mediante polarizadores no convencionales

### 3.1. Introducción

Como se dijo en la introducción de esta tesis, la síntesis de haces de luz con distribuciones no uniformes de la polarización es un tema de creciente interés en Óptica, tanto desde el punto de vista teórico como por sus aplicaciones. Hasta el momento, se han propuesto diversos métodos para sintetizar haces no-uniformemente polarizados [TF90, SS96, NN00, NB03, VP04, NG05, QD05, BD06, RW07, SB07, ES08, KK08, ML08, TK08], aunque la mayoría de ellos están enfocados a la síntesis de haces radialmente o azimutalmente polarizados. En particular, algunas de estas técnicas usan configuraciones de tipo interferométrico [TF90], láminas retardadoras variables por sectores [QD05, KK08, ML08], retardadores basados en birrefringencia producida por tensión [SB07] o convertidores de polarización fabricados con dispositivos de cristal líquido [SS96, BD06, RW07, ES08, TK08]. Se ha demostrado que estos haces pueden utilizarse en numerosas aplicaciones tales como las pinzas ópticas, atrapamiento de partículas, procesamiento de materiales,



microscopia, etc. [LC99, NN99, NB01, DQ03, ZH04, ZH09].

El objetivo de este capítulo es presentar un método de síntesis de haces completamente coherentes y no uniformemente polarizados utilizando polarizadores no convencionales. Los haces que se han generado se han caracterizado mediante los parámetros introducidos en el capítulo 2 y pertenecen a la clase de los denominados haces espiralmente polarizados [YB00, GO01, ZL02, BS04, BS05, GO08, HL08, RP09], que incluyen como casos particulares a los haces radiales y azimutales [MM08b, MM08c].

### 3.2. Descripción general

En general, cualquier haz plano quasimonocromático con distribución de polarización espiral en un plano transversal a la dirección de propagación  $z$ , puede representarse a través del siguiente vector de Jones [GO01]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r, \theta) \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \alpha) \\ \cos(\theta + \alpha) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{r} = (r, \theta)$  es el vector de posición asociado a un punto de la sección transversal y  $\alpha$  un ángulo constante respecto de la dirección azimutal. La matriz de polarización asociada a este tipo de haces se escribe

$$\hat{P}(r, \theta) = |f(r, \theta)|^2 \begin{pmatrix} \sin^2(\theta + \alpha) & -\sin(\theta + \alpha)\cos(\theta + \alpha) \\ -\sin(\theta + \alpha)\cos(\theta + \alpha) & \cos^2(\theta + \alpha) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

Debido a que el estado de polarización no está definido en el centro del perfil del haz, la función  $f(r, \theta)$  debe elegirse de forma que la amplitud del campo se anule en  $r = 0$ . La Ec. (3.1) describe un campo eléctrico cuyo estado de polarización es lineal en cualquier punto de la sección transversal, siendo el patrón de polarización resultante simétrico en torno al eje de propagación (simetría axial), como se muestra en la Fig. 3.1. Por tanto, variando  $\alpha$  se puede obtener toda la gama de patrones de polarización de tipo espiral, que abarca desde el caso azimutal (para  $\alpha = 0$ ) al caso radial (cuando  $\alpha = \pi/2$ ).

Como se dijo anteriormente, los haces espiralmente polarizados incluyen como casos límite a los haces radialmente y azimutalmente polarizados [MM08b,

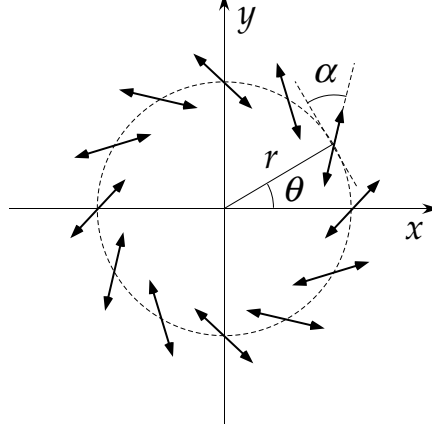


Figura 3.1: Esquema del patrón de polarización de un haz espiralmente polarizado

MM08c], de forma que cualquier campo descrito por la Ec. (3.1) puede expresarse como suma de dos términos, uno con polarización radial y otro con polarización azimutal, de la siguiente forma [ZL02]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r, \theta) \left[ -\sin \alpha \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \cos \alpha \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right]. \quad (3.3)$$

La ecuación anterior pone en evidencia que las contribuciones de las partes radial y azimutal cambian cuando lo hace el valor de  $\alpha$  (ver Fig. 3.2).

Por otro lado, observando la expresión (3.1) parece que cualquier campo espiralmente polarizado puede construirse a partir de uno azimutalmente polarizado girando en cada punto de la sección transversal el estado de polarización un ángulo  $\alpha$ . Esta idea es la base del procedimiento de síntesis que se propone en la siguiente sección.

### 3.3. Síntesis de campos espiralmente polarizados

El objetivo aquí es sintetizar haces TNUP que se puedan describir a través de la Ec. (3.1). Para ello se ha propuesto el dispositivo experimental representado en la Fig. 3.3 donde se utilizan polarizadores no convencionales y un rotador de la polarización para generar la distribución de polarización de tipo espiral buscada.

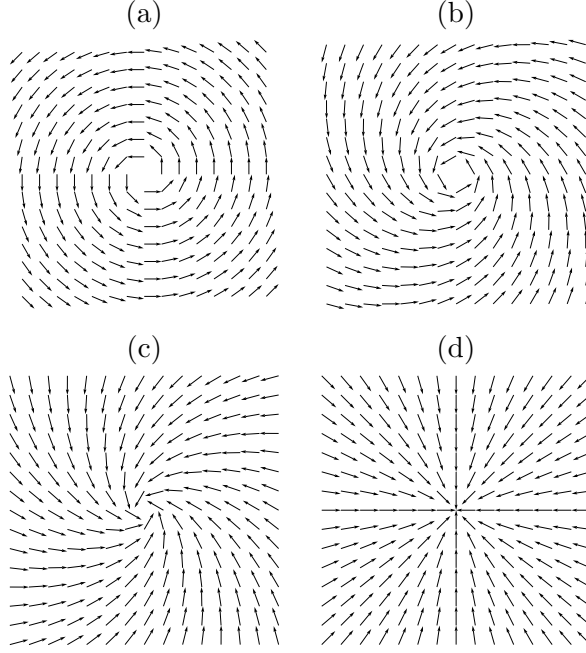


Figura 3.2: Patrones de polarización utilizando diversos valores de  $\alpha$ : (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = \pi/6$ , (c)  $\alpha = \pi/3$  y (d)  $\alpha = \pi/2$ .

La luz que emerge de un láser de He-Ne (Spectra-Physics 117A) se expande, se filtra espacialmente y se colima mediante un sistema de colimación (SC) formado por un objetivo de microscopio, un filtro espacial y una lente convergente. El haz láser está linealmente polarizado en la dirección vertical,  $y$ . Después del sistema de colimación se coloca un filtro en amplitud (F) cuya función de transmisión es aproximadamente  $t(r) = [1 - \exp(-r/w)^4]$  con  $w \approx 1$  mm y siendo  $t(r)$  nula en el centro del haz. El elemento que hemos denominado elemento azimutal (EA) representa un dispositivo óptico que permite generar un haz azimutalmente polarizado. En particular, como se verá más adelante, se usan polarizadores no convencionales diferentes para producir dos tipos de haces azimutalmente polarizados. Después del EA se sitúa un rotador de la polarización (R) que rota localmente el campo eléctrico del haz incidente (azimutal) produciendo un campo espiralmente polarizado [ZL02]. El rotador (R) consiste en dos láminas de media onda,  $\lambda/2$ , cuyos ejes forman un ángulo  $\gamma$  entre sí. Puede demostrarse que

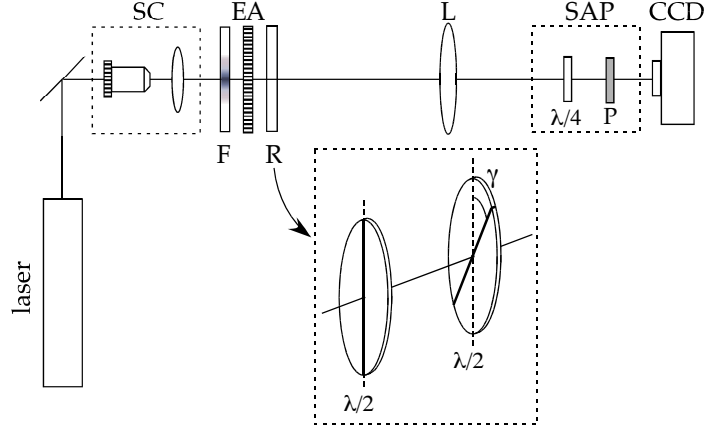


Figura 3.3: Dispositivo experimental para síntesis de campos espiralmente polarizados. En el sistema *SC* representa el sistema de colimación; *F* es un filtro en amplitud; *EA* es el elemento azimutal; *R* es el rotador de la polarización; *L* una lente convergente; y *SAP* es el sistema de análisis de la polarización.

la matriz de Jones que describe el sistema óptico formado por este par de láminas es [ZL02, RP09]

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \cos(2\gamma) & -\sin(2\gamma) \\ \sin(2\gamma) & \cos(2\gamma) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

que, efectivamente, representa una rotación de ángulo  $2\gamma$  de la polarización incidente, en cada punto del perfil transversal del haz.

Finalmente, se sitúa una lente convergente (*L*) que forma la imagen del campo que emerge del rotador sobre una cámara CCD (modelo Pulnix TM-765). Justo delante de la cámara se sitúa el sistema de análisis de la polarización (*SAP*), que consiste en una lámina de cuarto de onda ( $\lambda/4$ ) y un polarizador lineal (*P*), y que se usa para medir los parámetros de Stokes locales en la sección transversal del campo.

En el primer experimento, el elemento *EA* consiste en una lámina de fase de cuarto de onda,  $\lambda/4$ , seguida de un polarizador azimutal dicróico comercial (“axis finder” de Edmund Optics). La lámina  $\lambda/4$ , orientada de forma adecuada,

convierte la polarización lineal incidente en polarización circular. La matriz de Jones que describe el “axis finder” puede escribirse

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

e ignorando el factor de amplitud con simetría cilíndrica que introduce la transmitancia  $F$ , así como otros factores constantes, el campo a la salida del polarizador azimutal viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \exp(i\theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Finalmente, tras el rotador, el vector de Jones del campo generado resulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \exp(i\theta) \begin{pmatrix} -\sin(\theta + 2\gamma) \\ \cos(\theta + 2\gamma) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

que es de la forma dada por la Ec. (3.1) cuando  $\gamma = \alpha/2$ . Nótese que debido a la presencia de la lámina  $\lambda/4$ , el perfil de irradiancia es rotacionalmente simétrico e independiente del valor de  $\gamma$ .

Cambiando el valor de  $\gamma$  de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , se obtienen diversos patrones de polarización de tipo espiral, es decir, campos no-uniformemente y linealmente polarizados con diferentes pesos de las componentes radial y azimutal. En particular,  $\gamma = 0^\circ$  y  $\gamma = 90^\circ$  conducen a distribuciones de polarización azimutales y cuando  $\gamma = 45^\circ$  se obtiene polarización de tipo radial.

En el segundo experimento, el elemento óptico no convencional que produce la distribución de polarización azimutal es un convertidor de polarización (CP) (Arcoptix) basado en un dispositivo de cristal-líquido, que rota de forma local la polarización del campo incidente [SS96]. En este caso, la matriz de Jones que describe la acción del convertidor es

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

de modo que el campo a la salida del mismo viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Siendo en este caso, el campo a la salida del rotador de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \begin{pmatrix} -\sin(\theta + 2\gamma) \\ \cos(\theta + 2\gamma) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

que es similar al campo de la Ec. (3.7) pero sin el factor de fase  $\exp(i\theta)$  que introduce el “axis finder”.

### 3.4. Caracterización de la polarización

La caracterización de los haces generados anteriormente se ha llevado a cabo en el plano donde se sintetizan y desde dos puntos de vista diferentes, por un lado, se ha realizado una caracterización local, analizando el estado de polarización del haz en cada punto del perfil transversal, y por otro lado, una caracterización global a través del estudio de diferentes parámetros globales, en particular, aquellos que dan idea del contenido de polarización circular, radial y azimutal en el haz.

El estado de polarización en cada punto de la sección transversal se ha determinado a partir de los parámetros de Stokes calculados en dicho punto. A modo de ejemplo, en las Figs. 3.4 y 3.5 se muestran los perfiles de irradiancia experimentales y las distribuciones de polarización asociados a los haces espiralmente polarizados descritos, respectivamente, por las Ecs. (3.7) y (3.10) para el caso particular de  $\alpha = 20^\circ$ .

Desde el punto de vista global, para caracterizar los campos dados por las Ecs. (3.7) y (3.10) se utilizan los parámetros desfinidos en el Capítulo 2. De acuerdo con la Ec. (3.3), un haz espiralmente polarizado puede escribirse como combinación lineal de dos campos, uno de tipo radial y otro de tipo azimutal, que vienen representados por dos vectores de Jones linealmente independientes. Por esta razón, los contenidos de polarización radial,  $\tilde{\rho}_R$ , y azimutal  $\tilde{\rho}_A$  son dos parámetros globales que parecen especialmente útiles para caracterizar estos haces.

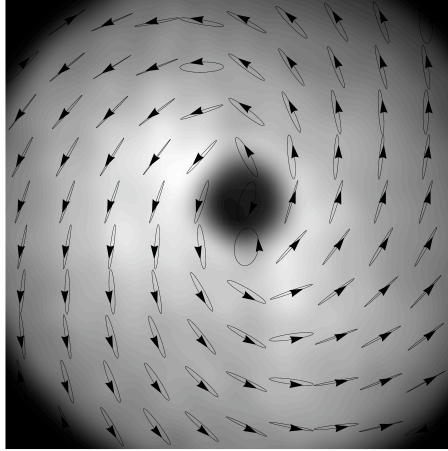


Figura 3.4: Distribución de polarización de un haz espiralmente polarizado generado usando el polarizador azimutal. Caso particular  $\alpha = 20^\circ$ .

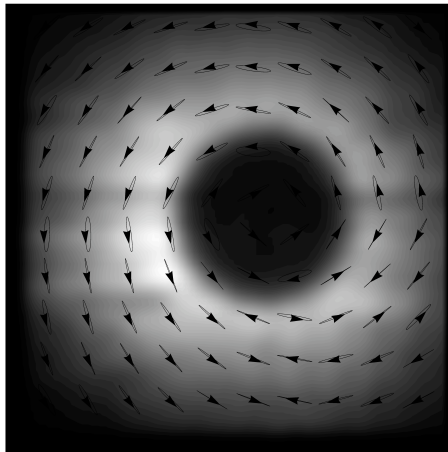


Figura 3.5: Distribución de polarización de un haz espiralmente polarizado generado usando el convertidor de polarización. Caso particular  $\alpha = 20^\circ$ .

Para campos definidos por la Ec. (3.1), los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  son independientes de la amplitud,  $f(r, \theta)$ , y vienen dados por las siguientes expresiones analíticas

$$\tilde{\rho}_R = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha), \quad (3.11a)$$

$$\tilde{\rho}_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha), \quad (3.11b)$$

siendo sus varianzas

$$\sigma_R^2 = \sigma_A^2 = 0, . \quad (3.12)$$

En las Figs. 3.6 y 3.7 se han representado los valores experimentales de los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  para distintos valores del ángulo de rotación  $\alpha$ , junto con las curvas teóricas (líneas continuas en la figura) calculadas a partir de las expresiones (3.11a) y (3.11b). El valor medio, tanto de  $\sigma_R^2$  como de  $\sigma_A^2$ , es igual a  $0,0114 \pm 0,0001$ , en el caso del experimento realizado con el “axis finder” e igual a  $0,049 \pm 0,002$  cuando el elemento azimutal empleado es el convertidor de polarización. En el segundo caso, las varianzas son ligeramente mayores que las obtenidas en el primer experimento, por tanto, se podría decir que la distribución de los contenidos de polarización radial y azimutal es menos uniforme para campos generados con la segunda configuración experimental.

Por otro lado, observando los patrones de polarización del apartado anterior (Figs. 3.4 y 3.5), vemos que los haces generados experimentalmente no presentan, como se esperaba, estados de polarización estrictamente lineales en todos los puntos del perfil sino que poseen un cierto contenido de polarización circular. Para determinar el porcentaje de dicha componente, se calcula el parámetro global  $\tilde{\rho}_c$  (definido en el Cap.2). En la Fig. 3.8 se representa  $\tilde{\rho}_c$  en función del ángulo  $\alpha$ , donde los puntos y los círculos corresponden, respectivamente, a medidas experimentales realizadas con el “axis finder” (AF) y con el convertidor de polarización (PC).



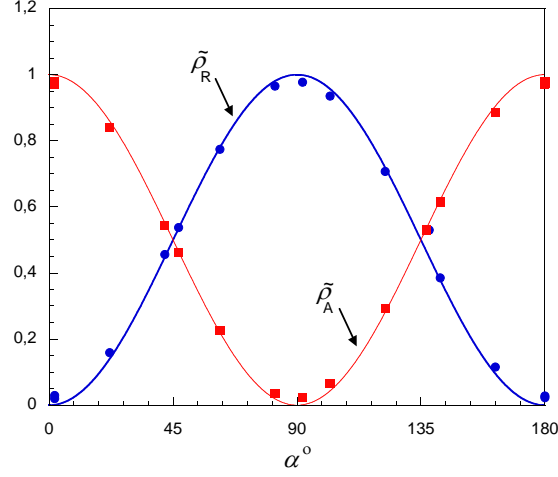


Figura 3.6: Parámetros globales  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  en función de  $\alpha$  en el caso de un campo espiralmente polarizado generado usando el polarizador azimutal

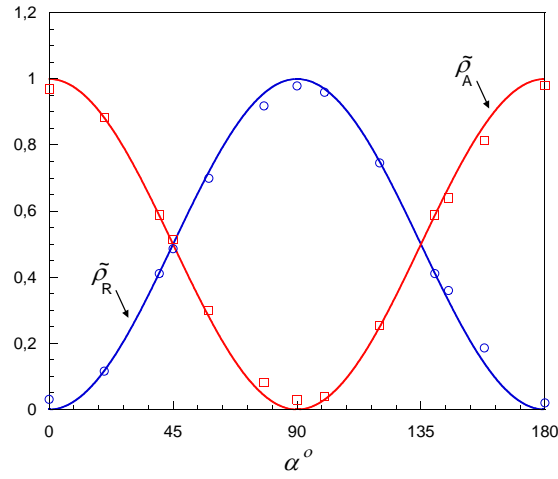


Figura 3.7: Parámetros globales  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  en función de  $\alpha$  en el caso de un haz espiralmente polarizado generado usando el convertidor de polarización

Las ligeras desviaciones de los valores experimentales de  $\tilde{\rho}_c$  respecto al valor teórico (cero) muestran que tanto el “axis finder” como el convertidor de polarización se comportan de forma no ideal. En cualquier caso, el contenido de polarización circular en ambos casos es pequeño, siendo su valor medio  $0,13 \pm 0,01$  y  $0,08 \pm 0,01$ , respectivamente para cada experimento. Por otra parte, la Fig. 3.8 muestra que los valores de  $\tilde{\rho}_c$  son menores en el segundo experimento que en el primero, por tanto, los haces generados usando el convertidor de polarización están más linealmente polarizados que los obtenidos con el AF, hecho que se observaba en los patrones de polarización expuestos en la sección anterior (Figs. 3.4 y 3.5).

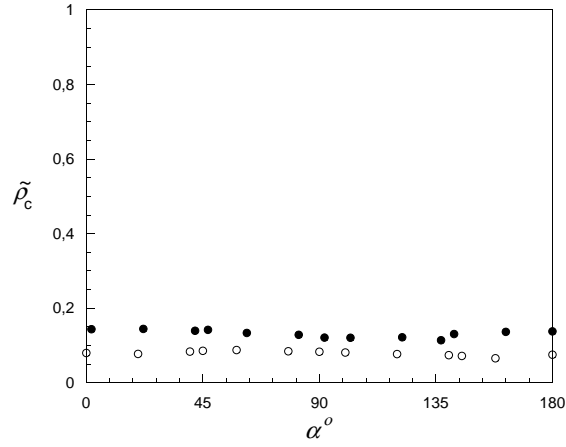


Figura 3.8: Contenido circular,  $\tilde{\rho}_c$ , en función de  $\alpha$ . Casos: Campo generado utilizando el polarizador azimutal (puntos) y utilizando el convertidor de polarización (círculos)

Finalmente, para comprobar que el sistema óptico formado por el elemento azimutal (EA) y el rotador (R) no depolariza el haz de entrada, se ha calculado el grado de polarización ponderado comprobándose que su valor se mantiene igual a la unidad.

### 3.5. Caracterización espacial global

Los haces espiralmente polarizados son un caso particular de otra clase más general de haces linealmente y no uniformemente polarizados que se escriben como combinaciones lineales de vectores de la base de polarización introducida por Gori [GO01], útil a su vez para describir haces polarizados con vórtices simples de carga topológica  $m$ . Los elementos de dicha base, vectores unitarios que dependen únicamente de la coordenada  $\theta$ , son:

$$\begin{aligned} \hat{v}_1(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix}, & \hat{v}_2(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ -\sin m\theta \end{pmatrix}, \\ \hat{v}_3(\theta) &= \begin{pmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{pmatrix}, & \hat{v}_4(\theta) &= \begin{pmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $m$  es la carga de un vórtice simple. En particular, cuando  $m = 1$ ,  $\hat{v}_1$  y  $\hat{v}_3$  representan, respectivamente, estados de polarización de tipo radial y azimutal, mientras que  $\hat{v}_2$  y  $\hat{v}_4$  representan otras distribuciones de polarización lineales y no-uniformes con simetría axial (ver Fig. 3.9). Para valores más altos de  $m$  y combinaciones diferentes de los vectores de la base, se obtienen distribuciones de polarización más complicadas.

Desde el punto de vista espacial es interesante conocer la capacidad de enfoque tanto en campo cercano como en campo lejano de los haces anteriores, es decir, su calidad y estudiar si ésta depende de la distribución concreta de polarización. Por esta razón, en esta sección se caracterizan globalmente, desde el punto de vista espacial y en aproximación paraxial, haces que pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \mathbf{E}_1(r, \theta) + \mathbf{E}_2(r, \theta) = f(r) \hat{v}_i(\theta) + g(r) \hat{v}_j(\theta), \quad (3.14)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3, 4$  y  $\hat{v}_i$  y  $\hat{v}_j$  son dos vectores de la base de polarización. Las funciones  $f(r)$  y  $g(r)$  se deben elegir de forma que su amplitud sea nula en el origen del vórtice puesto que el estado de polarización no está bien definido en dicho punto. En particular, se determinará el parámetro de calidad,  $Q$ , distinguiendo tres casos:

- i.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{v}_i(\theta)$ ,

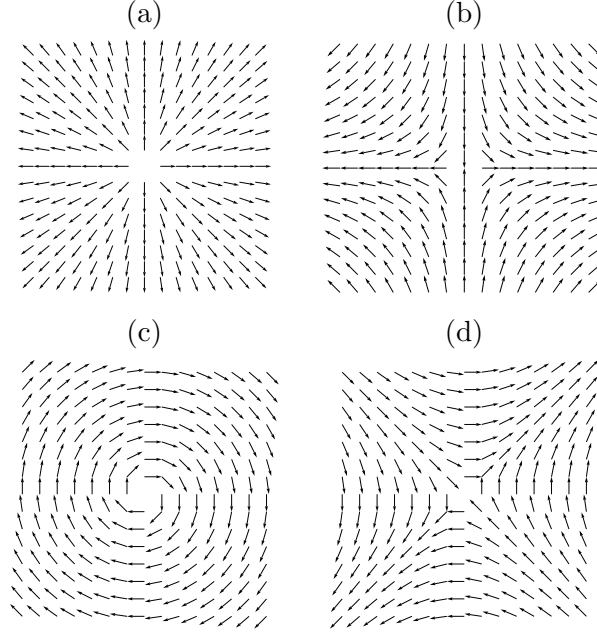


Figura 3.9: Patrones de polarización asociados a los vectores de la base de Gori con  $m = 1$ : (a)  $\hat{v}_1(\theta)$ , (b)  $\hat{v}_2(\theta)$ , (c)  $\hat{v}_3(\theta)$  y (d)  $\hat{v}_4(\theta)$ .

- ii.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{v}_i(\theta) + g(r) \hat{v}_j(\theta)$  con  $\hat{v}_i \cdot \hat{v}_j = 0$ , donde se incluyen los haces espiralmente polarizados, y
- iii.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{v}_i(\theta) + g(r) \hat{v}_j(\theta)$  con  $\hat{v}_i \cdot \hat{v}_j \neq 0$ .

Para abordar correctamente este problema es necesario considerar previamente un problema más general, esto es, derivar la expresión de la calidad del haz que se obtiene al superponer dos haces arbitrarios,  $\mathbf{E}(r, \theta) = \mathbf{E}_1(r, \theta) + \mathbf{E}_2(r, \theta)$ . Veamos:

En términos de los momentos de segundo orden del haz, el parámetro de calidad (en aproximación paraxial) en el plano de la cintura se define

$$Q = \langle r^2 \rangle \langle \eta^2 \rangle, \quad (3.15)$$

donde  $\langle r^2 \rangle$  y  $\langle \eta^2 \rangle$  se corresponden, como se dijo en el capítulo 2, con la anchura mínima del haz y la divergencia del mismo (anchura en campo lejano). Para haces

completamente coherentes,  $\langle r^2 \rangle$  y  $\langle \eta^2 \rangle$  en coordenadas polares se expresan de la siguiente forma:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{P} \int \int r^2 |\mathbf{E}(r, \theta)|^2 r dr d\theta, \quad (3.16a)$$

y

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{k^2 P} \int \int \left( \left| \frac{\partial \mathbf{E}(r, \theta)}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \mathbf{E}(r, \theta)}{\partial \theta} \right|^2 \right) r dr d\theta, \quad (3.16b)$$

siendo

$$P = \int \int |\mathbf{E}(r, \theta)|^2 r dr d\theta. \quad (3.17)$$

la potencia total del haz.

Si se considera un campo electromagnético escrito como superposición de dos haces cualesquiera

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \mathbf{E}_1(r, \theta) + \mathbf{E}_2(r, \theta). \quad (3.18)$$

Aplicando las ecuaciones anteriores, el parámetro  $Q$  puede escribirse en términos de las calidades de los haces  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  como sigue

$$\begin{aligned} Q &= \frac{P_1^2}{P^2} Q_1 + \frac{P_2^2}{P^2} Q_2 + \frac{P_1 P_2}{P^2} Q_{mix} \\ &+ \frac{P_{12}}{P} \langle r^2 \rangle_{12} \left( \frac{P_1}{P} \langle \eta^2 \rangle_1 + \frac{P_2}{P} \langle \eta^2 \rangle_2 \right) \\ &+ \frac{P_{12}}{P} \langle \eta^2 \rangle_{12} \left( \frac{P_1}{P} \langle r^2 \rangle_1 + \frac{P_2}{P} \langle r^2 \rangle_2 \right) \\ &+ \frac{P_{12}^2}{P^2} \langle r^2 \rangle_{12} \langle \eta^2 \rangle_{12}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$Q_i = \langle r^2 \rangle_i \langle \eta^2 \rangle_i, \quad (3.20a)$$

$$Q_{mix} = \langle r^2 \rangle_1 \langle \eta^2 \rangle_2 + \langle r^2 \rangle_2 \langle \eta^2 \rangle_1, \quad (3.20b)$$

$$\langle r^2 \rangle_{ij} = \frac{\int \int r^2 (\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_j) r dr d\theta}{\int \int (\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_j) r dr d\theta}, \quad (3.20c)$$

$$\langle \eta^2 \rangle_{ij} = \frac{1}{k^2} \frac{\int \int \left( \frac{\partial \mathbf{E}_i^*}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_i^*}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial \theta} \right) r dr d\theta}{\int \int (\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_j) r dr d\theta}, \quad (3.20d)$$

$$P_i = \int \int (\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_i) r dr d\theta = \int \int |\mathbf{E}_i(r, \theta)|^2 r dr d\theta, \quad (3.20e)$$

$$P_{12} = 2 \int \int (\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2) r dr d\theta, \quad (3.20f)$$

con  $i, j = 1, 2$ ,  $\langle \alpha \beta \rangle_{ii} = \langle \alpha \beta \rangle_i$ , siendo  $Q_i$  y  $P_i$  la calidad y la potencia de cada haz,  $\mathbf{E}_i(r, \theta)$ , y  $P = P_1 + P_2 + P_{12}$  la potencia total del campo. Nótese que el signo del término  $P_{12}$  dependerá del producto escalar  $(\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2)$ .

A continuación, se estudia en detalle el parámetro de calidad,  $Q$ , para haces dados por la Ec. (3.14) en cada uno de los casos anteriormente citados:

- i. Cuando en la Ec. (3.14) la función  $g(r) = 0$ , el campo se escribe

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{v}_i(\theta), \quad (3.21)$$

y su calidad,  $Q$ , se degrada proporcionalmente a  $m^2$ . Su expresión analítica es

$$Q = Q_0 + \frac{m^2}{k^2} \langle r^2 \rangle \frac{\int \frac{|f(r)|^2}{r^2} r dr}{\int |f(r)|^2 r dr}, \quad (3.22)$$

donde  $Q_0$  es la calidad del haz cuando  $m = 0$  (haz uniformemente y totalmente polarizado), que viene dada por

$$Q_0 = \langle r^2 \rangle \langle \eta^2 \rangle, \quad (3.23)$$

con

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2 |f(r)|^2 r dr}{\int |f(r)|^2 r dr}, \quad (3.24a)$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{k^2} \frac{\int \left| \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right|^2 r dr}{\int |f(r)|^2 r dr}. \quad (3.24b)$$

La Ec. (3.22) representa el parámetro de calidad de un haz cuyo estado de polarización viene dado por cualquier vector de la base de polarización (Ecs. (3.13)). En particular, para  $m = 1$  la Ec. (3.22) representa la calidad de un haz radialmente o azimutalmente polarizado. Es interesante mencionar que se obtiene la misma calidad (Ec. (3.22)) para un haz con un vórtice simple de carga  $m$  y uniformemente polarizado dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) e^{im\theta} \hat{v}, \quad (3.25)$$

donde  $\hat{v}$  es un vector constante y unitario. El factor  $e^{im\theta}$  es la fase espiral que caracteriza el vórtice simple de carga  $m$  localizado en el punto  $x = y = 0$  y  $Q_0$  representa el parámetro de calidad de un haz sin vórtices (es decir, sin el factor de fase  $e^{im\theta}$ ). Se obtiene el mismo resultado que en el caso escalar, donde la calidad del haz se degrada al aumentar  $m$  ya que la fase del vórtice produce astigmatismo en el campo [RS00].

- ii. Si  $\hat{v}_i(\theta) \cdot \hat{v}_j(\theta) = 0$ , es decir, los dos vectores de la base de polarización son ortogonales. En estas condiciones, el parámetro de calidad se debe evaluar a través de la expresión de la calidad para la superposición de haces (Ec. (3.19)) considerando  $P_{12} = 0$ . Si además  $f(r) = g(r)$  se recupera el resultado de la sección anterior ( $Q$  viene dado por la Ec. (3.22)). Los haces espiralmente polarizados son un ejemplo de este tipo. Nótese que el valor de  $Q$  es el mismo independientemente de si el haz posee una distribución de polarización de tipo radial, azimutal o espiral.
- iii. Por último, si los vectores de la base se eligen de forma que  $\hat{v}_i \cdot \hat{v}_j \neq 0$ ,

condición que se satisface, por ejemplo, si se trabaja con los vectores

$$\hat{v}_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Usando la fórmula de Euler se puede reescribir la Ec. (3.14) de la siguiente forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} A(r) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} A^*(r) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

con

$$A(r) = f(r) e^{im\theta} + g(r) e^{-in\theta}. \quad (3.28)$$

Por tanto, el haz no-uniformemente polarizado dado por la Ec. (3.14) puede expresarse como superposición de dos haces, uno circularmente polarizado a derechas y otro a izquierdas, ambos con irradiancia proporcional a  $|A(r)|^2$ . Los momentos de segundo orden de este haz son

$$\langle r^2 \rangle = \frac{P_f}{P} \langle r^2 \rangle_f + \frac{P_g}{P} \langle r^2 \rangle_g + \frac{P_{fg}}{P} \langle r^2 \rangle_{fg}, \quad (3.29a)$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{P_f}{P} \langle \eta^2 \rangle_f + \frac{P_g}{P} \langle \eta^2 \rangle_g + \frac{P_{fg}}{P} \langle \eta^2 \rangle_{fg}, \quad (3.29b)$$

donde los subíndices  $f$  y  $g$  se refieren, respectivamente, a las funciones  $f(r)$  y  $g(r)$ , y

$$\langle r^2 \rangle_f = \frac{\int r^2 |f(r)|^2 r dr}{\int |f(r)|^2 r dr}, \quad (3.30a)$$

$$\langle r^2 \rangle_g = \frac{\int r^2 |g(r)|^2 r dr}{\int |g(r)|^2 r dr}, \quad (3.30b)$$

$$\langle r^2 \rangle_{fg} = \frac{\int r^2 f(r) g(r) r dr}{\int f(r) g(r) r dr}, \quad (3.30c)$$



$$\langle \eta^2 \rangle_f = \frac{1}{k^2} \frac{\int \left| \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right|^2 r dr + m^2 \int \frac{|f(r)|^2}{r^2} r dr}{\int |f(r)|^2 r dr}, \quad (3.30d)$$

$$\langle \eta^2 \rangle_g = \frac{1}{k^2} \frac{\int \left| \frac{\partial g(r)}{\partial r} \right|^2 r dr + n^2 \int \frac{|g(r)|^2}{r^2} r dr}{\int |g(r)|^2 r dr}, \quad (3.30e)$$

$$\langle \eta^2 \rangle_{fg} = \frac{1}{k^2} \frac{\int \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} r dr - m n \int \frac{1}{r^2} f(r) g(r) r dr}{\int f(r) g(r) r dr}, \quad (3.30f)$$

$$P_f = (2\pi) \int |f(r)|^2 r dr, \quad (3.30g)$$

$$P_g = (2\pi) \int |g(r)|^2 r dr, \quad (3.30h)$$

$$\begin{aligned} P_{fg} &= 2 \int f(r) g(r) r dr \int \cos[(m+n)\theta] d\theta \\ &= 2 \frac{\sin[2\pi(m+n)]}{(m+n)} \int f(r) g(r) r dr. \end{aligned} \quad (3.30i)$$

Con todo esto, la calidad del haz se calcula a través de la expresión general de  $Q$ , Ec. (3.19).

Para valores  $(m+n)$  enteros, el factor  $P_{fg}$  es nulo ya que la integral  $\int \cos[(m+n)\theta]$  es distinta de cero únicamente cuando las cargas de los vórtices tienen valor fraccionario.

En el caso particular  $f(r) = g(r)$  el campo resultante es superposición de dos haces con amplitudes idénticas y cargas topológicas distintas, y se satisfacen las siguientes igualdades  $P_f = P_g$ ,  $\langle r^2 \rangle_f = \langle r^2 \rangle_g = \langle r^2 \rangle_{fg} = \langle r^2 \rangle$ . Esto significa que las anchuras y las potencias de los dos haces son iguales. Por otro lado, la divergencia global del haz,  $\langle \eta^2 \rangle$ , resulta

$$\langle \eta^2 \rangle = \langle \eta^2 \rangle_f + \frac{t}{k^2} \frac{\int \frac{|f(r)|^2}{r^2} r dr}{\int |f(r)|^2 r dr}, \quad (3.31)$$

con

$$t = \frac{(m-n)^2 + 2mn \{1 - \text{sinc}[2(m+n)\pi]\}}{2 \{1 + \text{sinc}[2(m+n)\pi]\}}, \quad (3.32)$$

y  $P_{fg}$  se simplifica resultando

$$P_{fg} = 2 P_f \text{sinc}[2(m+n)\pi]. \quad (3.33)$$

Usando las Ecs. (3.31)-(3.32), se encuentra la siguiente expresión para el parámetro de calidad

$$Q = Q_0 + \frac{t}{k^2} \langle r^2 \rangle \frac{\int \frac{|f(r)|^2}{r^2} r dr}{\int |f(r)|^2 r dr}. \quad (3.34)$$

El parámetro  $t$  es semidefinido positivo,  $t \geq 0$ . El valor mínimo,  $t = 0$  se alcanza cuando  $m = n = 0$ , y el máximo,  $t = (m^2 + n^2)/2$ , si  $(m+n) = 1, 2, 3, \dots$ . Es interesante también resaltar el caso  $n = -m$ , es decir, el caso donde se superponen campos con vórtices de cargas opuestas, para el que la calidad del haz, de nuevo, viene dada por la Ec. (3.22).

### 3.5.1. Ejemplo: Haces no-uniformemente polarizados de tipo Bessel-Gauss

Con el fin de visualizar las diferencias entre los tres casos estudiados en la sección anterior, en esta sección se aplicarán las expresiones obtenidas para la calidad a un ejemplo particular: haces no-uniformemente polarizados con amplitud de tipo Bessel-Gauss (BG).

Los haces escalares de tipo Bessel-Gauss de orden 0 fueron introducidos por Gori et al. [GG87], y desde entonces diferentes autores se han ocupado, tanto en el tratamiento escalar como en el vectorial, del estudio y la síntesis experimental de dichos haces [JH94, GH96, GH98, NN07, SE08]. Por otro lado, en varios trabajos se ha abordado el estudio de las características espaciales y la propagación en la superposición de haces tipo BG escalares [BS97, OS04, TY05a]. Se ha demostrado que los haces BG mantienen su estructura espacial en propagación libre.

Se considera un haz no-uniformemente polarizado dado por la Ec. (3.14) con amplitudes

$$f(r) = J_m(ar) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right), \quad (3.35a)$$

$$g(r) = J_n(ar) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right), \quad (3.35b)$$

donde  $J_m(ar)$  y  $J_n(ar)$  son funciones de Bessel de órdenes  $m$  y  $n$  distintos, que coinciden con el valor de las cargas de los vórtices,  $a$  es un parámetro que determina la escala transversal de la función de Bessel, y  $w$  la anchura del factor gaussiano.

Se analizan a continuación los tres casos estudiados en la sección anterior:

- i. Cuando  $g(r) = 0$ , la calidad del haz coincide con la de un haz con un único vórtice (ver Ec. (3.25)) escrito en la forma

$$\mathbf{E}(r, \theta) = J_m(ar) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp(im\theta) \hat{v}, \quad (3.36)$$

que representa un haz uniformemente polarizado. En este caso, el parámetro  $Q$ , calculado a partir de la Ec. (3.22), coincide con la calidad de un haz de tipo Bessel-Gauss escalar [BS97]. En la Fig. 3.10 se representa el parámetro de calidad normalizado,  $k^2Q$ , en función del orden,  $m$ , observándose que la calidad del haz se degrada al aumentar el orden  $m$ . Este comportamiento se debe a que tanto la anchura del haz como la divergencia crecen al aumentar  $m$  (ver [BS97]). En particular, el valor de la calidad de un haz de tipo BG radialmente o azimutalmente polarizado,  $k^2Q = 25.7$ , se obtiene a partir de la figura 3.10 tomando  $m = 1$ .

- ii. Si  $\hat{v}_i \cdot \hat{v}_j = 0$ ,  $m$  debe ser igual a  $n$  (con  $m, n$  enteros) y por tanto  $f(r) = g(r)$ , de modo que se obtiene el mismo comportamiento que en el punto anterior (ver Fig. 3.10).
- iii. Cuando los vectores  $\hat{v}_i$  y  $\hat{v}_j$  no son ortogonales, pueden darse dos situaciones diferentes:

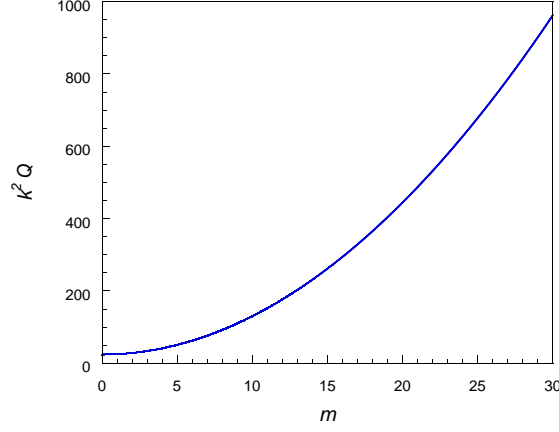


Figura 3.10: Parámetro de calidad normalizado,  $k^2Q$ , en función del orden,  $m$

- a) Para valores  $(m + n)$  enteros, en la Fig. 3.11 se ha representado el parámetro de calidad normalizado a la calidad de un haz gaussiano frente a la carga  $n$  para tres valores de  $m$  fijos. En este caso, al aumentar el valor de  $n$ , el valor la calidad,  $Q$ , tiende al valor que se obtiene con la fórmula (3.22) cuando  $m = 1, 3$  ó  $5$  (ver figura 3.11). Existe un valor de  $n$  para el que la degradación de  $Q$  es máxima, es decir, para el que se obtiene la peor calidad. Al variar  $n$ , tanto la anchura como la divergencia del haz presentan el mismo comportamiento que el parámetro calidad, es decir, presentan un máximo. Dicho máximo puede explicarse usando la Fig. 3.12 donde se ha representado, para tres haces diferentes con  $m = 5$  y  $n = 1, 10$ , y  $15$ , la distribución de irradiancia en el plano  $z = 0$  a lo largo de un diámetro y normalizada al valor del pico. Comparando los tres perfiles de irradiancia puede observarse que los máximos secundarios son mayores y se sitúan a mayor distancia respecto al centro del haz ( $\mathbf{r} = 0$ ) en el caso  $n = 10$ . Estas “colas” afectan a los momentos de segundo orden, produciendo la degradación de la calidad del haz. De hecho, en la Fig. 3.11 puede verse que la peor calidad se obtiene cuando  $m = 5$  y  $n = 10$ .

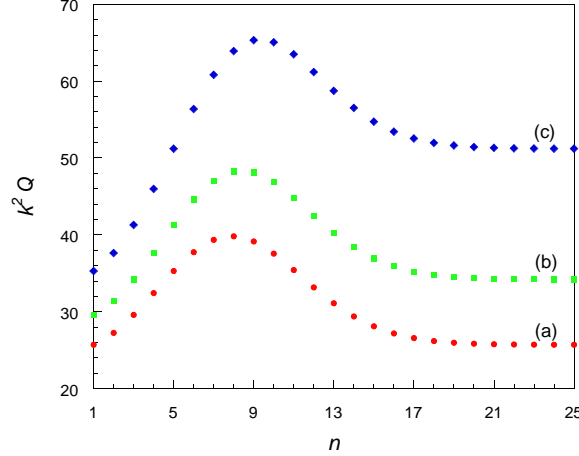


Figura 3.11: Parámetro de calidad normalizado con la calidad de un haz gaussiano frente a la carga  $n$  (entera) para tres valores de  $m$  fijos: (a)  $m = 1$ , (b)  $m = 3$  y (c)  $m = 5$ .

Para finalizar, un ejemplo de este tipo de haces es la solución derivada por Greene and Hall para describir haces generados por láseres de semiconductor de tipo CCGSE (concentric-circle grating surface emitting) [GH98] que se pueden escribir en la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = J_{l+1}(ar) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \hat{v}_1[(l+1)\theta] + J_{l-1}(ar) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \hat{v}_2[(l-1)\theta]. \quad (3.37)$$

Con este tipo de haces, el parámetro de calidad debe calcularse tomando  $m = l - 1$  y  $n = l + 1$ . En particular, recurriendo a la Fig. 3.11 si  $l = 2, 4$ , y  $6$  se obtienen los valores  $k^2 Q = 29.6, 41.3$  y  $60.8$ .

- b) Cuando  $(m + n)$  es un número fraccional, para obtener la calidad del haz hay que recurrir a la expresión general dada en la Ec. (3.19). En este caso, la función sinc que aparece en la expresión del parámetro  $t$  modula las curvas anteriores dando lugar a la aparición de “ondulaciones ó rizo” (Ver Fig. 3.13). Este caso es equivalente a estudiar la calidad de un haz con vórtices de carga fraccionaria [BE04, BP04, LY04, TY05b].

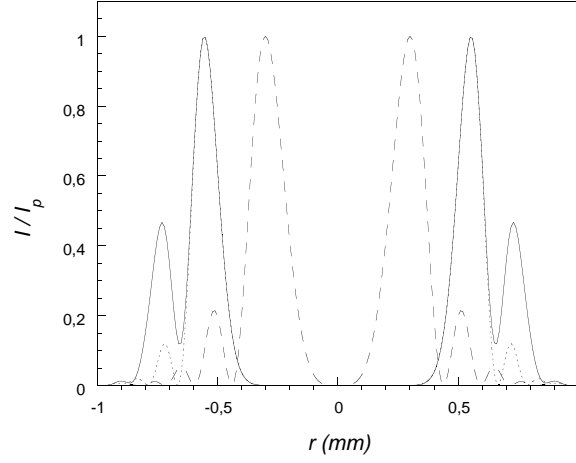


Figura 3.12: Perfiles de irradiancia en un diámetro de la sección transversal del haz normalizados al valor de la irradiancia máxima con  $m = 5$  y  $n = 1$  (línea discontinua),  $n = 10$  (línea continua) y  $n = 15$  (línea punteada).

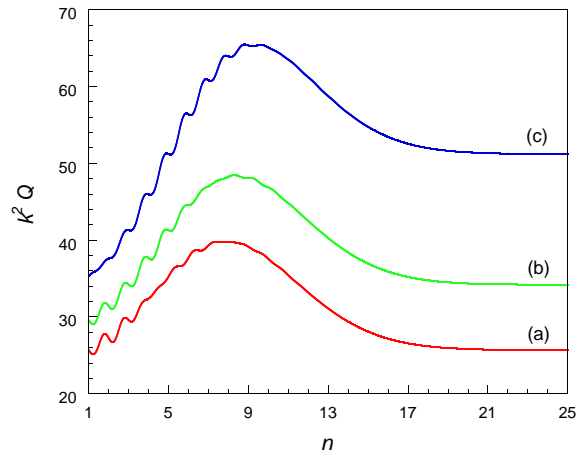


Figura 3.13: Parámetro de calidad normalizado con la calidad de un haz gaussiano frente a la carga  $n$  (incluyendo el caso  $(n + m)$  fraccionario) para tres valores de  $m$  fijos: (a)  $m = 1$ , (b)  $m = 3$  y (c)  $m = 5$ .



## Capítulo 4

# Síntesis de haces totalmente y no-uniformemente polarizados mediante sistemas interferométricos de tipo Mach-Zehnder y transmitancias en amplitud

### 4.1. Introducción

En el capítulo anterior se estudió cómo sintetizar haces totalmente y no uniformemente polarizados (TNUP) utilizando polarizadores no convencionales, en particular, un polarizador azimutal (“axis finder”) o un convertidor de la polarización seguidos ambos de un rotador de la polarización.

En este capítulo, se propone un método para generar haces TNUP mediante sistemas interferométricos de tipo Mach-Zehnder (M-Z) y transmitancias en amplitud. En particular, se estudia el caso concreto de las transmitancias supergaussianas (SG). Por otra parte, a partir del haz TNUP sintetizado y utilizando



un polarizador lineal situado a la salida del interferómetro, se estudia cómo realizar un conformado espacial del haz, es decir, cómo cambiar punto a punto el perfil de irradiancia (conformado local) a la vez que se modifican los valores de ciertos parámetros globales del haz (conformado global), en particular el parámetro de calidad,  $Q$ , y la curtosis,  $K$ .

## 4.2. Procedimiento de síntesis

En esta sección se propone un procedimiento para generar haces totalmente y no uniformemente polarizados utilizando transmitancias en amplitud generales. El método se basa en la superposición de dos haces con polarizaciones ortogonales y amplitudes no uniformes (dependientes del punto) diferentes. Para ello se utiliza el sistema interferométrico de tipo Mach-Zehnder (M-Z) que se representa en las Figs. 4.1.

Se considera un haz colimado, linealmente y uniformemente polarizado. Dicho haz incide sobre una de las caras del divisor de haz no polarizante ( $BS_1$ ) situado en la entrada del interferómetro. Si el haz de entrada está linealmente polarizado a  $45^\circ$  respecto del plano de incidencia, para conseguir que los dos haces que viajan por los brazos del interferómetro tengan estados de polarización ortogonales en cada uno de los brazos del interferómetro se sitúa un polarizador lineal (ver Fig. 4.1 (a)), uno de ellos con el eje de transmisión en la dirección  $s$  (perpendicular al plano de incidencia) y el otro con su eje de transmisión en la dirección  $p$  (paralela al plano de incidencia). Equivalentemente, se podría incidir sobre el interferómetro con un haz colimado y linealmente polarizado según la dirección  $s$ , en tal caso, bastaría colocar una lámina de fase de media onda con sus ejes a  $45^\circ$  en uno de los brazos del interferómetro para conseguir dos haces con polarizaciones ortogonales (ver Fig. 4.1 (b)).

A continuación, cada uno de estos haces incide sobre una transmitancia en amplitud,  $t_1(\mathbf{r})$  ó  $t_2(\mathbf{r})$  situadas, respectivamente, en el brazo superior o inferior del M-Z. Finalmente se recombinan en el segundo divisor de haz ( $BS_2$ ). A la salida del interferómetro se sitúa una lente convergente (L) que forma la imagen de los dos campos que se obtienen a la salida de las transmitancias. Dicha imagen se forma en el plano  $\Pi_o$ . Asumiendo que los caminos ópticos, los espejos y los

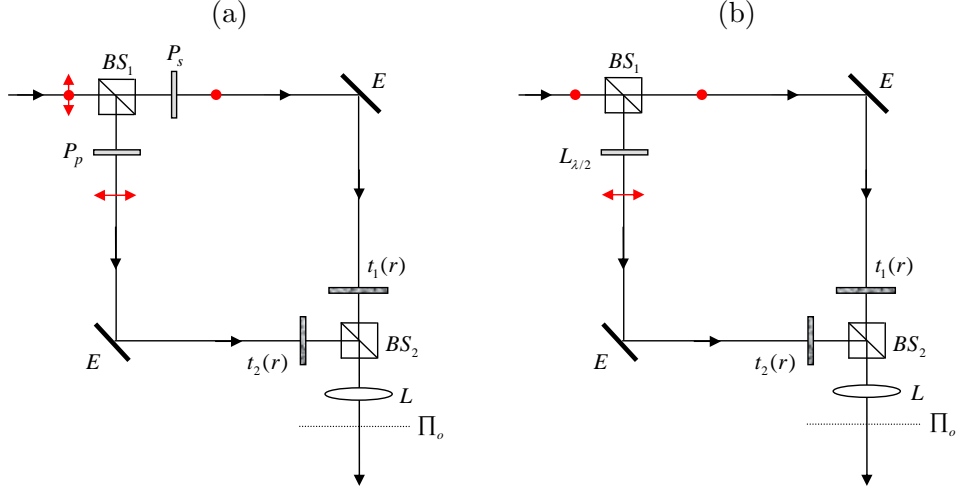


Figura 4.1: Sistema interferométrico propuesto para sintetizar haces NUTP usando transmitancias en amplitud. En el sistema (a):  $P_s$  y  $P_p$  son dos polarizadores lineales con ejes de transmisión orientados según las direcciones  $s$  (perpendicular al plano de incidencia) y  $p$  (paralela al plano de incidencia), respectivamente;  $t_1(r)$  y  $t_2(r)$  son las transmitancias en amplitud;  $E$  son los espejos y  $BS_1$ ,  $BS_2$  los divisores de haz del M-Z; y  $L$  es una lente convergente. En el sistema (b):  $L_{\lambda/2}$  una lámina de media onda. En ambos sistemas  $\Pi_o$  representa el plano donde se ha sintetizado el haz TNUP que se pretende caracterizar.

divisores de haz del interferómetro son idénticos y que no introducen desfase, el haz TNUP que se obtiene a la salida del M-Z se puede describir en el formalismo de Jones a través de un vector de la forma

$$\mathbf{E}^{(o)}(\mathbf{r}) \propto E^{(i)}(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} t_1(\mathbf{r}) \\ t_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde los superíndices  $(i)$  y  $(o)$  se refieren, respectivamente, al campo de entrada y de salida en el M-Z. Además se ha supuesto que los divisores de haz del interferómetro dividen el haz de entrada en dos haces de igual amplitud. La matriz de polarización,  $\hat{P}$ , que describe el estado de polarización local del haz dado por

la Ec. (4.1) se escribe

$$\hat{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z) \propto |E^{(i)}(\mathbf{r})|^2 \begin{pmatrix} t_1^2(\mathbf{r}) & t_1(\mathbf{r})t_2(\mathbf{r}) \\ t_1(\mathbf{r})t_2(\mathbf{r}) & t_2^2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

que, como se aprecia, dependerá de la forma concreta de las transmitancias utilizadas.

#### 4.2.1. Transmitancias supergaussianas

Las transmitancias supergaussianas son transmitancias en amplitud denominadas de “borde suave” cuya función de transmisión es más aplanada que la de una transmitancia gaussiana. En la literatura se ha demostrado su utilidad en el desarrollo de diversas aplicaciones, como por ejemplo, en el conformado del perfil de irradiancia dentro de las cavidades láser [BL92] o el conformado de haces escalares [SP96], en el estudio de la calidad [SM92, SM93a], etc. En esta sección, se estudia su aplicabilidad en la generación de haces con distribuciones de polarización no uniformes.

Las transmitancias en amplitud de tipo supergaussiano se pueden describir a través de una función de transmisión rotacionalmente simétrica de la forma

$$t_i(\mathbf{r}) = \exp[-g_i(r)], \quad (4.3)$$

donde

$$g_i(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\omega_i} \right)^{2n_i}, \quad (4.4)$$

con  $i = 1, 2$ , refiriéndose a las dos transmitancias que se colocan en los brazos del M-Z y siendo  $\omega_i$  una constante positiva relacionada con la anchura de la apertura,  $n_i$  el orden de la misma y  $r$  la coordenada radial. Cuando  $n_i > 1$  y entero, la apertura se denomina supergaussiana (SG) [BP91] (ver Fig. 7.2 (a)). Si  $n_i = 1$ , la Ec. (4.3) representa una transmitancia gaussiana. A las transmitancias con  $n_i < 1$  se las puede llamar “subgaussianas” (ver Fig. 7.2 (b)). Las funciones supergaussianas son más achatadas que las funciones gaussianas mientras que las subgaussianas son más apuntadas que éstas. Nótese que estas aperturas son de borde suave y que por tanto son despreciables los efectos de difracción.

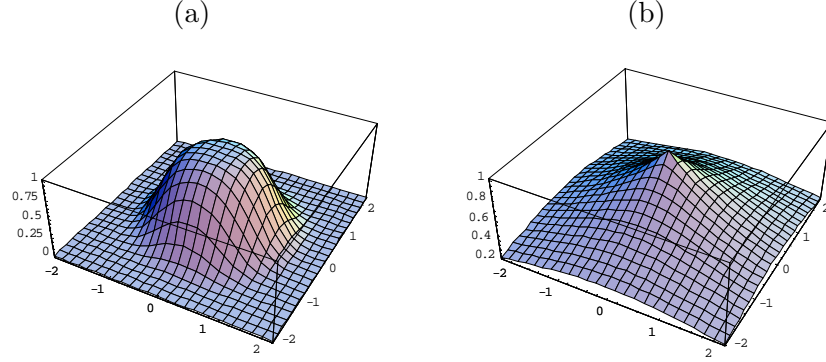


Figura 4.2: Función de transmisión de una transmitancia supergaussiana de parámetros  $n = 2$  y  $\omega = 1$  mm (a) y de una transmitancia subgaussiana de parámetros  $n = 0,5$  y  $\omega = 1$  mm (b).

### 4.3. Caracterización local

Cuando en los brazos del interferómetro se sitúan dos transmitancias supergaussianas con anchuras y órdenes diferentes dadas por las Ecs. (4.3) y (4.4), el campo  $\mathbf{E}^{(o)}(\mathbf{r})$  se escribe

$$\mathbf{E}^{(o)}(\mathbf{r}) \propto E^{(i)}(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} \exp[-g_1(r)] \\ \exp[-g_2(r)] \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Dada la dependencia en  $\mathbf{r}$  la Ec. (4.5) representa un haz TNUP cuya matriz de polarización es

$$\hat{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z) \propto |\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})|^2 \begin{pmatrix} \exp[-2g_1(r)] & \exp\{-[g_1(r) + g_2(r)]\} \\ \exp\{-[g_1(r) + g_2(r)]\} & \exp[-2g_2(r)] \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

A partir de los elementos de la matriz de polarización se calculan los parámetros de Stokes locales, que resultan

$$s_0(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})|^2 \{\exp[-2g_1(r)] + \exp[-2g_2(r)]\}, \quad (4.7a)$$

$$s_1(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})|^2 \{\exp[-2g_1(r)] - \exp[-2g_2(r)]\}, \quad (4.7b)$$

$$s_2(\mathbf{r}) = 2|\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})|^2 \exp\{-[g_1(r) + g_2(r)]\}, \quad (4.7c)$$

$$s_3(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.7d)$$

Utilizando estos parámetros y aplicando las definiciones del capítulo 2 se pueden determinar el grado de polarización, la elipticidad y el azimut en cada punto de la sección transversal del haz. Por el procedimiento de síntesis utilizado el haz generado es totalmente y linealmente polarizado, por tanto, el grado de polarización local y la elipticidad local son, respectivamente,  $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = 1$  y  $\chi(\mathbf{r}) = 0$  en cualquier punto  $\mathbf{r}$  de dicha sección transversal. Por otro lado, la distribución de polarización es no uniforme, es decir, el azimut local del campo cambia de un punto a otro en la sección transversal del haz. Además, dada la simetría rotacional de las transmitancias, dicho parámetro varía de la misma manera en cualquier diámetro de la sección transversal. La expresión que se obtiene para  $\psi(\mathbf{r})$  es

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \exp [-(g_1(r) + g_2(r))]}{\exp [-2g_1(r)] - \exp [-2g_2(r)]} \right). \quad (4.8)$$

Por otra parte, a partir de los parámetros de Stokes locales se puede obtener el estado de polarización en cada punto de la sección transversal del haz. El mapa de polarización representado en la Fig. 4.3 da idea del tipo de distribuciones de polarización que se pueden obtener utilizando transmitancias SG en el sistema óptico propuesto. Se observa que el valor del azimut local varía desde  $45^\circ$  (en el centro del haz) hasta anularse en los bordes del perfil de irradiancia. La velocidad de cambio depende de los órdenes de las transmitancias que se coloquen en los brazos del interferómetro, es decir, de los valores concretos de los parámetros  $n_1$  y  $n_2$ .

En el laboratorio se ha sintetizado un haz TNUP mediante un procedimiento ligeramente simplificado respecto al método general propuesto en la Sec. 4.2. En dicho experimento se ha utilizado una única transmitancia de tipo supergaussiano situada en uno de los brazos del interferómetro. Su función de transmisión es de la forma  $t(\mathbf{r}) = \exp [-(r/\omega)^{2n}]$ . De manera que, a la salida del M-Z, se obtiene un haz TNUP cuyo vector de Jones es

$$\mathbf{E}^{(o)}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ t(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

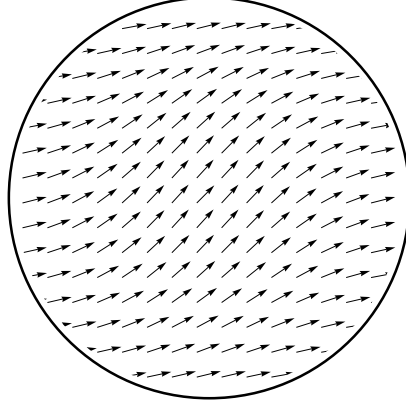


Figura 4.3: Distribución de la polarización en la sección transversal del haz NUTP generado a la salida del M-Z utilizando dos transmitancias subgaussianas de parámetros  $n_1 = 0.5$ ,  $n_2 = 0.8$  y  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  mm

En este caso, los parámetros de Stokes locales vienen dados por las siguientes expresiones

$$s_0(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})|^2 (1 + \exp[-2(r/\omega)^{2n}]) \quad (4.10a)$$

$$s_1(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})|^2 (1 - \exp[-2(r/\omega)^{2n}]), \quad (4.10b)$$

$$s_2(\mathbf{r}) = 2|\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})|^2 \exp[-2(r/\omega)^{2n}], \quad (4.10c)$$

$$s_3(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.10d)$$

y por tanto, el azimut en cada punto de la sección transversal del haz es

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \exp[-2(r/\omega)^{2n}]}{1 - \exp[-2(r/\omega)^{2n}]} \right). \quad (4.11)$$

En la Fig. 4.4 se ha representado cómo cambia el azimut en un diámetro cualquiera de la sección transversal del haz en función de los parámetros característicos de la transmitancia utilizada, es decir, de la anchura  $\omega$  y del orden  $n$ . El valor del azimut, como en el caso general, varía de forma continua desde  $45^\circ$  (en el centro del haz) hasta cero (en las colas del haz).

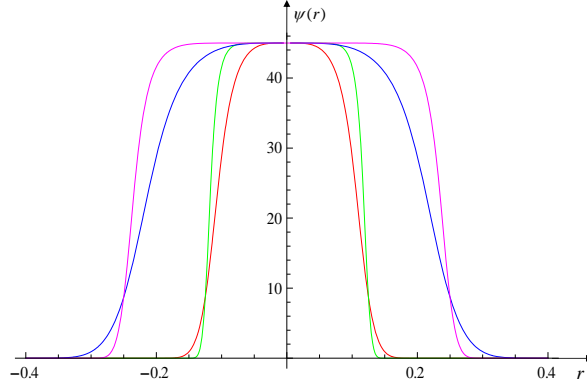


Figura 4.4: Azimut local en un diámetro cualquiera de la sección transversal del haz. Casos:  $\omega = 1/8$  mm,  $n = 2$  (rojo),  $\omega = 1/8$  mm,  $n = 5$  (verde),  $\omega = 1/4$  mm,  $n = 4$  (azul) y  $\omega = 1/4$  mm,  $n = 5$  (magenta).

Para llevar a cabo el experimento, se ha utilizado como fuente un láser continuo de He-Ne (Spectra Physics, modelo 117A) estabilizado en intensidad y frecuencia que emite en el modo fundamental  $TEM_{00}$  con  $\lambda = 632.8$  nm y potencia  $P \simeq 1$  mW. El haz emitido por dicha fuente está linealmente polarizado en la dirección  $s$  y se puede describir en términos del siguiente vector de Jones

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}) = E_0 \exp \left[ -(r^2/\omega_0^2) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

donde  $\omega_0$  es la anchura del haz láser. El haz dado por la Ec. (4.12) atraviesa un sistema de colimación compuesto por un objetivo de microscopio ( $MO_c$ ) y una lente ( $L_c$ ) y a continuación incide sobre el primer divisor de haz del interferómetro. Tras dividirse en dos haces de igual potencia en el  $BS_1$ , uno de ellos (polarizado en la dirección  $s$ ) se propaga libremente por el brazo superior del interferómetro mientras que el otro pasa, en primer lugar, a través de una lámina de media onda,  $\lambda/2$ , con sus ejes rápidos formando un ángulo de  $45^\circ$ , resultando así un haz polarizado en la dirección paralela al plano de incidencia,  $p$ . En segundo lugar incide sobre la transmitancia supergaussiana  $t(\mathbf{r})$  cuyos parámetros característicos son  $\omega = 1/8$  mm y  $n = 2$  (ver detalle de la transmitancia en la Fig. 4.5). Se ha trabajado con una lámina  $\lambda/2$  en lugar de usar dos polarizadores lineales para evitar que el haz se atenúe en exceso, pues ello dificultaría la medida de los

parámetros de Stokes locales.

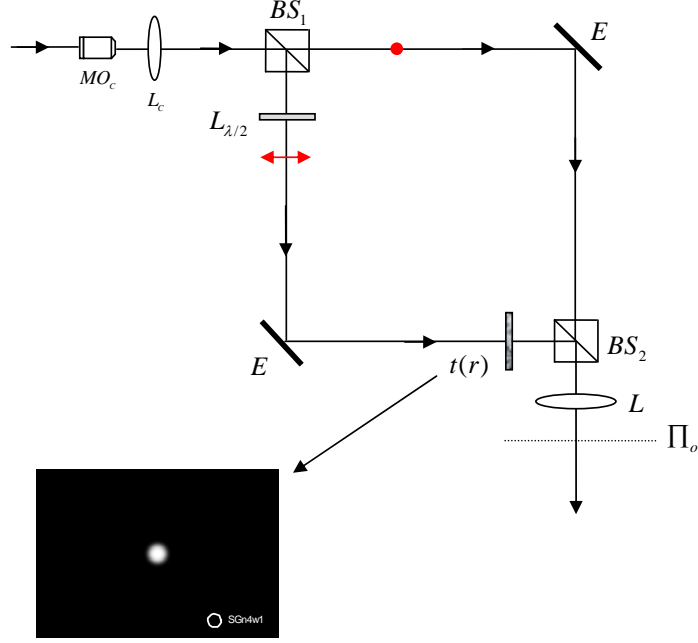


Figura 4.5: Esquema del sistema interferométrico (similar al sistema de la Fig. 4.1) implementado en el laboratorio para sintetizar un haz TNUP usando una transmitancia en amplitud de tipo supergaussiana,  $t(r)$ , con parámetros característicos  $n = 2$  y  $\omega = 1/8$  mm.

Finalmente, los dos haces se superponen en el segundo divisor de haz,  $BS_2$ , resultando un haz TNUP que se describe a través de la Ec. (4.9).

Recurriendo al procedimiento habitual se han medido los parámetros de Stokes locales y se ha obtenido el azimuth local del haz. En la Fig. 4.6 se ha representado  $\psi(\mathbf{r})$  usando los datos correspondientes al diámetro  $y = 0$  del perfil transversal del haz. El azimuth local varía, tal y como se esperaba de acuerdo con las predicciones teóricas, desde un valor máximo igual a  $44.7^\circ$  que se obtiene en la zona central de la sección transversal del haz hasta un valor mínimo igual a  $2.9^\circ$  asociado a uno de los extremos del diámetro considerado. Las diferencias existentes entre teoría y experimento pueden deberse a pequeños desalineamientos en el



sistema experimental, a imperfecciones de la transmitancia utilizada, etc.

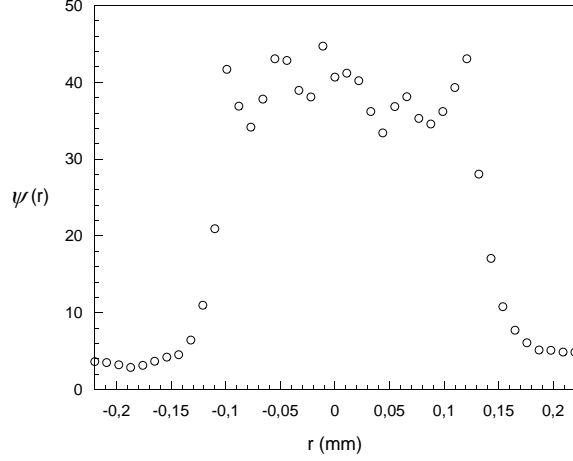


Figura 4.6: Azimut local en un diámetro de la sección transversal del haz a la salida del M-Z cuando en el brazo inferior del mismo se coloca una transmitancia supergaussiana de parámetros  $\omega = 1/8$  mm y  $n = 2$ .

#### 4.4. Caracterización global

Para caracterizar desde el punto de vista global la estructura espacial del haz dado por la Ec (4.5) se utilizan los parámetros  $Q$  y  $K$  que se han definido en las secciones 2.3.4 y 2.3.5. Dada la simetría rotacional de las transmitancias en amplitud supegaussianas se puede demostrar que  $Q_{3D} = 4Q$  siendo  $Q = \langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle xu \rangle^2$ . Por tanto, el parámetro de calidad  $Q$  se puede calcular, sin pérdida de generalidad, considerando una única componente transversal (caso bidimensional).

Suponiendo que el campo es completamente coherente y estacionario, los momentos de irradiancia que se necesitan para calcular los parámetros de calidad y curtosis del haz se escriben (ver Sec. 2.3.4)

$$\langle x^2 \rangle_i = \langle x^2 \rangle_{ii} = \frac{1}{I_{ii}} \int x^2 E_i^*(x, z) E_i(x, z) dx, \quad (4.13a)$$

$$\langle x^4 \rangle_i = \langle x^4 \rangle_{ii} = \frac{1}{I_{ii}} \int x^4 E_i^*(x, z) E_i(x, z) dx, \quad (4.13b)$$

$$\langle u^2 \rangle_i = \langle u^2 \rangle_{ii} = \frac{1}{k^2 I_{ii}} \int \partial_x E_i^*(x, z) \partial_x E_i(x, z) dx, \quad (4.13c)$$

donde,

$$I_{ii} = I_i \equiv \int |E_i(x, z)|^2 dx, \quad (4.14)$$

con  $i = s$  ó  $p$ .

En el plano de la cintura, es decir, en el plano donde la anchura del haz es mínima, se verifica que  $\langle xu \rangle_s = 0$  y  $\langle xu \rangle_p = 0$ . En este plano el parámetro de calidad del haz,  $Q$ , viene dado por la ecuación,

$$Q = \frac{I_s^2}{I^2} Q_s + \frac{I_p^2}{I^2} Q_p + \frac{I_s I_p}{I^2} Q_{sp}, \quad (4.15)$$

donde

$$Q_s = \langle x^2 \rangle_s \langle u^2 \rangle_s, \quad (4.16a)$$

$$Q_p = \langle x^2 \rangle_p \langle u^2 \rangle_p, \quad (4.16b)$$

$$Q_{sp} = \langle x^2 \rangle_s \langle u^2 \rangle_p + \langle x^2 \rangle_p \langle u^2 \rangle_s. \quad (4.16c)$$

Por otro lado, el parámetro de curtosis,  $K$ , se define mediante la expresión

$$K = \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2}, \quad (4.17)$$

con

$$\langle x^4 \rangle = \frac{I_s}{I} \langle x^4 \rangle_s + \frac{I_p}{I} \langle x^4 \rangle_p, \quad (4.18a)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{I_s}{I} \langle x^2 \rangle_s + \frac{I_p}{I} \langle x^2 \rangle_p. \quad (4.18b)$$

Usando las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes expresiones analíticas para los parámetros de calidad y de curtosis,  $Q$  y  $K$ , del campo a la salida del interferómetro,  $\mathbf{E}^{(o)}$ ,

$$Q = \frac{\left[ \frac{\omega_1^3}{2n_1} \Gamma\left(\frac{3}{2n_1}\right) + \frac{\omega_1^3}{2n_2} \Gamma\left(\frac{3}{2n_2}\right) \right] \left[ \frac{n_1}{2\omega_1} \Gamma\left(2 - \frac{1}{2n_1}\right) + \frac{n_2}{2\omega_2} \Gamma\left(2 - \frac{1}{2n_2}\right) \right]}{k^2 \left[ \frac{\omega_1}{2n_1} \Gamma\left(\frac{1}{2n_1}\right) + \frac{\omega_1}{2n_2} \Gamma\left(\frac{1}{2n_2}\right) \right]^2}, \quad (4.19)$$

$$K = \frac{\left[ \frac{\omega_1^5}{2n_1} \Gamma\left(\frac{5}{2n_1}\right) + \frac{\omega_2^5}{2n_2} \Gamma\left(\frac{5}{2n_2}\right) \right] \left[ \frac{\omega_1}{2n_1} \Gamma\left(\frac{1}{2n_1}\right) + \frac{\omega_2}{2n_2} \Gamma\left(\frac{1}{2n_2}\right) \right]}{\left[ \frac{\omega_1^3}{2n_1} \Gamma\left(\frac{3}{2n_1}\right) + \frac{\omega_2^3}{2n_2} \Gamma\left(\frac{3}{2n_2}\right) \right]^2}, \quad (4.20)$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma. De las expresiones anteriores se deduce que tanto  $Q$  como  $K$  dependen de los parámetros característicos de las transmitancias, es decir, de sus anchuras,  $\omega_i$ , y sus órdenes,  $n_i$ . Una vez fijados estos parámetros,  $Q$  y  $K$  toman valores concretos. De la Ec. (4.19), se deriva que cuando  $n_1 = n_2 = n$  y  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , es decir, cuando en los brazos del interferómetro se colocan transmitancias idénticas el haz de salida es uniformemente y totalmente polarizado (con estado de polarización lineal a  $45^\circ$  en cualquier punto de la sección transversal), y los valores de los parámetros  $Q$  y  $K$  vienen dados por las expresiones

$$Q = \frac{n^2}{k^2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{2n}\right)}{[\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)]^2}, \quad (4.21)$$

$$K = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{[\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)]^2}, \quad (4.22)$$

que son independientes de la anchura,  $\omega$ , de la transmitancia. Para el caso concreto de los haces gaussianos ( $n = 1$ ) se obtiene  $Q = 1/4k^2$  y  $K = 3$ .

## 4.5. Conformado global del haz

Para ciertas aplicaciones de los láseres es necesario utilizar haces de luz con distribuciones de irradiancia específicas. Con este propósito, en la literatura, se han propuesto diversas técnicas que permiten realizar un conformado espacial (*beam shaping*) del haz, es decir, modificar a voluntad su perfil de irradiancia. Las técnicas anteriores se basan en fenómenos como la refracción [RS80], la reflexión [BS81, IH90, PM94], la difracción [VE82], la absorción [IH72], la apodización [CK77, LE81], el efecto Faraday y el efecto Pockels [SL74], la birrefringencia [FG76, GP80], etc. El conformado del haz puede realizarse desde el punto de vista local, es decir, modificando la irradiancia del haz punto a punto, o globalmente. En tal caso se trabaja con parámetros globales y se estudia cómo cambian dichos parámetros cuando el haz se propaga a través de un sistema óptico, o bien se diseñan sistemas ópticos para obtener a la salida de los mismos haces con unas

características globales predeterminadas. Con objeto de modificar los parámetros globales del haz que describen su estructura espacial se han utilizado elementos ópticos variados, como por ejemplo, transmitancias de fase binarias [SI93] y cuárticas [MM92], lentes con aberración esférica [PM94], axiconos [LL03], lentes birrefringentes [PM99b] o interferómetros [MM02].

En esta sección se propone un método para realizar conformado espacial del haz sintetizado con el procedimiento descrito en la Sec. 4.2. Por ser la distribución de polarización de este haz no-uniforme, colocando un polarizador lineal a la salida del interferómetro y cambiando la orientación de su eje de transmisión es posible modificar la irradiancia del haz y por consiguiente, los parámetros globales dados por las Ecs. (4.19)-(4.20).

El vector de Jones que describe el campo a la salida del polarizador es,

$$\mathbf{E}'^{(o)}(x) = \hat{P}_\theta \mathbf{E}^{(o)}(x) = E^{(i)} [t_1(x) \cos \theta + t_2(x) \sin \theta] \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

donde  $\hat{P}_\theta$  representa a la matriz de Jones de un polarizador lineal ideal siendo  $\theta$  el ángulo que forma el eje de transmisión del polarizador con la dirección  $x$ . Se introduce la notación con primas para los parámetros evaluados detrás del polarizador.

Cuando  $\theta$  es igual a  $0^\circ$  o  $90^\circ$ ,  $Q'$  y  $K'$  (parámetros globales del haz a la salida del polarizador lineal) no dependen de las anchuras  $\omega_i$ . En estos dos casos, las expresiones analíticas del parámetro de calidad y curtosis a la salida del polarizador,  $Q'$  y  $K'$ , se simplifican considerablemente y coinciden con las expresiones (4.21) y (4.22), siendo  $n = n_1$  si  $\theta = 0^\circ$  y  $n = n_2$  si  $\theta = 90^\circ$ . Para el resto de valores de  $\theta$ ,  $Q'$  y  $K'$  dependen de  $n_i$  y  $\omega_i$  y se computan a partir de las ecuaciones (4.13a)-(4.13c), (4.15) y (4.17) mediante cálculo numérico.

Para analizar la variación que experimentan  $Q'$  y  $K'$  al rotar el polarizador, se han estudiado varios casos manteniendo fijas las anchuras de las transmitancias,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  mm y variando el orden de las mismas. En particular, se han elegido tres pares de transmitancias de distinto orden,  $n_1 \neq n_2$ : a)  $n_1 = 2$  y  $n_2 = 10$ , donde ambas transmitancias son de tipo supergaussiano, b)  $n_1 = 0.5$  y  $n_2 = 10$ ,

caso que corresponde a colocar en el M-Z una transmitancia subgaussiana (orden inferior a la unidad) y otra supergaussiana, y c)  $n_1 = 0.5$  y  $n_2 = 0.8$ , donde las dos transmitancias poseen órdenes menores que la unidad. Cuando colocamos dos transmitancias gaussianas en ambos brazos del interferómetro,  $n_1 = n_2 = 1$  (caso d)), obtenemos  $Q' = Q = Q_g = 1/4k^2$  (valor mínimo de  $Q$ ) y  $K' = K = K_g = 3$ . En las Figs. 4.7 y 4.8 se han representado los parámetros globales  $Q'$  y  $K'$ , normalizados respecto a los valores que toman cuando se considera un haz gaussiano de igual longitud de onda,  $Q_g$  y  $K_g$ , frente al ángulo del polarizador,  $\theta$ .

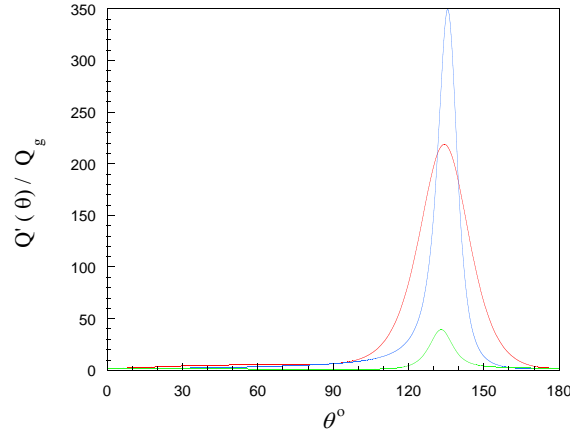


Figura 4.7: Parámetro de calidad del haz normalizado con el valor de la calidad de un haz gaussiano de la misma longitud de onda a la salida del polarizador,  $Q'/Q_g$ , frente al ángulo del polarizador,  $\theta$ . Casos: (a)  $n_1 = 2$  y  $n_2 = 10$  (azul), (b)  $n_1 = 0.5$  y  $n_2 = 10$  (rojo) y (c)  $n_1 = 0.5$  y  $n_2 = 0.8$  (verde) con  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  mm.

Del análisis de dichas figuras se desprenden las siguientes conclusiones:

- i. Al rotar el polarizador, tanto  $Q'$  como  $K'$  varían, excepto si las dos transmitancias son iguales en cuyo caso permanecen constantes y son independientes de  $\theta$ . Este hecho pone en evidencia que en el sistema propuesto los cambios en las características espaciales del haz van ligados a cambios en el estado de polarización.

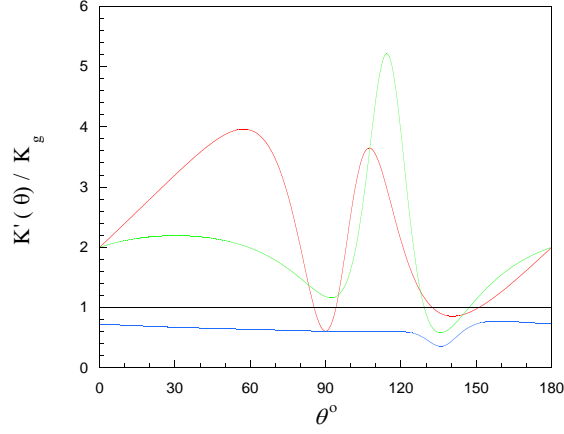


Figura 4.8: Parámetro de curtosis del haz normalizado con el valor de la curtosis de un haz gaussiano de la misma longitud de onda a la salida del polarizador,  $K'/K_g$ , frente al ángulo del polarizador,  $\theta$ . Casos: (a)  $n_1 = 2$  y  $n_2 = 10$  (azul), (b)  $n_1 = 0.5$  y  $n_2 = 10$  (rojo) y (c)  $n_1 = 0.5$  y  $n_2 = 0.8$  (verde) con  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  mm.

- ii. Para ciertos ángulos del polarizador,  $\theta$ , los valores de  $Q'$  y  $K'$  se repiten, por tanto, se obtienen haces de salida con distinto azimut y con idéntica calidad y curtosis.
- iii. El parámetro de calidad,  $Q'/Q_g$ , presenta un máximo absoluto en todos los casos (ver Fig. 4.7), es decir, la calidad del haz se degrada más para ciertos ángulos del polarizador. La degradación es mayor cuando se utilizan dos transmitancias supergaussianas que cuando ambas transmitancias poseen órdenes  $n_1, n_2 < 1$ .
- iv. Además, aunque no se aprecia en la Fig. 4.7,  $Q'/Q_g$  presenta en todos los casos un mínimo, que corresponde a la posición del eje de transmisión del polarizador para la cual se obtiene una menor degradación de la calidad del haz. Los mínimos se alcanzan en los siguientes ángulos: a)  $177.12^\circ$ , b)  $0.90^\circ$  y c)  $95.58^\circ$ . En este último caso,  $Q'/Q_g = 1.04$ , es decir, la calidad  $Q' \approx Q_g$  (veáse la Fig. 4.9).
- v. En la Fig. 4.8, se observa que el parámetro  $K'$  presenta máximos y mínimos

en todos los casos. Es decir, conforme rotamos el polarizador, podemos cambiar la forma del haz y su grado de aplanamiento. El máximo absoluto aumenta rápidamente al disminuir los órdenes de las transmitancias  $n_1$  y  $n_2$ . Para valores de  $n_1 \leq 0.6$  y  $n_2 \leq 0.35$ , o viceversa, el haz es leptocúrtico para cualquier valor de  $\theta$ , es decir, siempre  $K' > 3$ .

- vi. Si se estudia el caso  $n_1 = 2$  y  $n_2 = 10$ , representado en azul en la Fig. 4.8, se observa que  $K'/K_g < 1$  para todo ángulo  $\theta$ , es decir, el haz es siempre platicúrtico (más aplanado que el haz gaussiano). Para el resto de los casos, el haz cambia de platicúrtico a leptocúrtico y viceversa, pasando por diversos ángulos para los que el haz presenta la misma curtosis que en el caso gaussiano (esto es, el haz es mesocúrtico). Estos ángulos dependen de los valo:

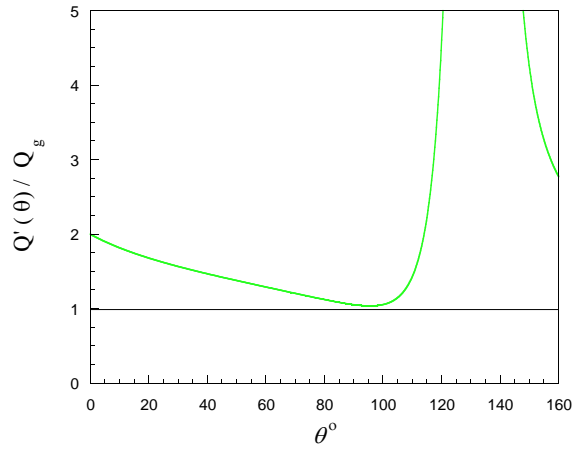


Figura 4.9: Detalle del mínimo del parámetro de calidad,  $Q'/Q_g$  en el caso (c)  $n_1 = 0.5$  y  $n_2 = 0.8$  con  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  mm.

Por último, comentar que la dependencia de la calidad y la curtosis del haz con las anchuras de las transmitancias  $(\omega_1, \omega_2)$  es débil en comparación con la dependencia con los órdenes de las mismas  $(n_1, n_2)$ .

## Capítulo 5

# Condiciones de realizabilidad para fuentes electromagnéticas parcialmente coherentes

### 5.1. Introducción

El primer problema que se debe abordar cuando se quiere sintetizar y/o modelizar una fuente de luz parcialmente coherente y parcialmente polarizada con distribución de polarización predeterminada en su sección transversal es el estudio de la estructura matemática de la matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}$ , que la describe. Los elementos de la matriz  $\widehat{W}$  representan las correlaciones entre las componentes transversales del campo eléctrico. Se sabe que una matriz  $\widehat{W}$  representa una fuente físicamente realizable si satisface la condición de no-negatividad. En la mayoría de los casos, determinar si una matriz  $\widehat{W}$  es definida no-negativa no es una tarea sencilla. Por esta razón, no son muchos los modelos que se han conseguido desarrollar para describir las características de coherencia y polarización de haces electromagnéticos. En particular, se han llevado a cabo estudios para describir fuentes electromagnéticas del modelo de Gauss-Schell (EGSM) [PG02, RK05, SK05, GS08] o haces electromagnéticos de tipo “diffraction-free” [BG09].

En este capítulo se aborda un problema más general, desarrollar un méto-



do que permite construir matrices de densidad espectral mútua en modo que la condición de no-negatividad se satisface de forma automática. El método se basa en la denominada *regla de superposición generalizada* que a su vez sugiere un procedimiento para la síntesis de dichas matrices. En la siguiente sección se introducirán las matrices de coherencia, posteriormente se deriva una condición suficiente de realizabilidad para fuentes electromagnéticas parcialmente coherentes y finalmente, para poner en evidencia la utilidad de la *regla de superposición generalizada*, se aplicará para obtener diferentes clases de fuentes que dan lugar a haces EGSM, a haces vectoriales de tipo “twisted” Schell y a haces con correlaciones cruzadas de tipo especular.

## 5.2. Matrices de coherencia

El formalismo general de las matrices de coherencia [WO59] proporciona una descripción de las propiedades vectoriales de cualquier campo electromagnético estocástico, asumiendo que dicho campo es estacionario y ergódico. Los elementos de estas cuatro matrices  $3 \times 3$  dan las correlaciones entre todas las componentes (longitudinal y transversales) de los campos eléctrico y magnético, evaluados en dos puntos e instantes de tiempo diferentes. En la literatura, a partir de las matrices de coherencia anteriores, considerando únicamente el campo eléctrico y despreciando la componente longitudinal del mismo (aproximación transversal) se han definido, por un lado, la matriz de coherencia mútua [MW95, WO07a, MM09], y la matriz de coherencia-polarización [GO98, GS98, MM09], ambas en el dominio del tiempo, y por otro lado, en el espacio de las frecuencias se ha definido la matriz de densidad espectral mútua que es equivalente a la matriz de coherencia mútua. Estas matrices describen conjuntamente las características de coherencia y de polarización del haz.

### 5.2.1. Matriz de densidad espectral mútua

Partiendo de las matrices de coherencia, cuando se considera únicamente el vector campo eléctrico,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , y se desprecia la componente longitudinal,  $z$ , del

mismo, se define la matriz de coherencia mútua [MW95, WO07a]

$$\widehat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \tau) = \begin{pmatrix} \Gamma_{ss}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \tau) & \Gamma_{sp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \tau) \\ \Gamma_{ps}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \tau) & \Gamma_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \tau) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  representan dos puntos del plano transversal  $z = \text{constante}$ , siendo  $z$  la dirección de propagación del campo y

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \tau) = \langle E_{\alpha}^*(\mathbf{r}_1, z; t) E_{\beta}(\mathbf{r}_2, z; t + \tau) \rangle_t, \quad (5.2)$$

donde los subíndices  $\alpha, \beta = s, p$  se refieren a las componentes transversales del campo,  $\langle \cdot \rangle_t$  denota promedio temporal y el asterisco indica complejo conjugado. La matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}$ , puede introducirse formalmente como la transformada de Fourier de la matriz de coherencia mútua del campo eléctrico, es decir

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} W_{ss}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \omega) & W_{sp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \omega) \\ W_{ps}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \omega) & W_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \omega) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Los elementos de la matriz dada por la Ec. (5.3) representan las correlaciones entre las componentes transversales del campo eléctrico en dos puntos,  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , y dos instantes de tiempo diferentes separados por un intervalo de tiempo,  $\tau$ , es decir,

$$W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \omega) = \langle E_{\alpha}^*(\mathbf{r}_1, z; \omega) E_{\beta}(\mathbf{r}_2, z; \omega) \rangle, \quad (5.4)$$

donde ahora los paréntesis  $\langle \cdot \rangle$  representan promedios sobre todas las realizaciones del campo eléctrico. La matriz  $\widehat{W}$  es hermítica, por tanto, los elementos no diagonales satisfacen la relación  $W_{ps}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \omega) = W_{sp}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, z; \omega)$ . En resumen, tanto la matriz de coherencia mútua como la matriz de densidad espectral mútua describen las propiedades de coherencia de una fuente electromagnética en un determinado plano  $z$ .

Por otro lado, si  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  la matriz  $\widehat{W}$  describe la polarización de la fuente electromagnética. En particular, el grado de polarización local,  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ , se puede escribir en términos del determinante (det) y la traza (tr) de la matriz

$\widehat{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z; \omega)$ :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \left( 1 - 4 \frac{\det[\widehat{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z; \omega)]}{\{\text{tr}[\widehat{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z; \omega)]\}^2} \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Por último, mencionar que la estructura matemática de la matriz de densidad espectral mútua no puede ser arbitraria, sino que debe satisfacer las condiciones de no-negatividad. En tal caso, se dice que la fuente descrita por esa matriz es, desde el punto de vista físico, realizable. Es importante, antes de intentar sintetizar experimentalmente cualquier fuente electromagnética estudiar el problema de la realizabilidad de la misma, es decir, determinar la estructura matemática de la matriz de densidad espectral mútua que la caracteriza. En la Sec. 5.3 de este capítulo, se obtiene una regla para construir matrices de densidad espectral mútua de forma segura, es decir, las matrices  $\widehat{W}$  así construidas satisfacen las condiciones de no-negatividad.

### 5.2.2. Matriz de coherencia-polarización

Si se asume que el campo es cuasi-monocromático de frecuencia promedio,  $\bar{\nu}$ , y que el retardo,  $\tau$ , es pequeño en comparación con el tiempo de coherencia,  $1/\Delta\nu$ , siendo  $\Delta\nu$  la anchura de la banda espectral, los elementos de la matriz de coherencia mútua se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\Gamma_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z; \tau) = J_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \exp(2\pi i \bar{\nu} \tau), \quad (5.6)$$

con

$$J_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = \langle E_j^*(\mathbf{r}_1, z; t) E_k(\mathbf{r}_2, z; t) \rangle_t, \quad (5.7)$$

donde las componentes del campo están evaluadas en el mismo instante de tiempo,  $t$ . En consecuencia, la matriz de coherencia-polarización (matriz BCP en la literatura) se define como [GO98, GS98]

$$\widehat{J}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = \begin{pmatrix} J_{ss}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) & J_{sp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \\ J_{ps}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) & J_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Los elementos de la matriz  $\widehat{J}$  poseen la misma estructura que la intensidad mútua (teoría escalar de la coherencia) [MW95]. En particular,  $J_{ss}$  y  $J_{pp}$  representan las

intensidades mútuas que caracterizarían un haz dónde sólo la componente  $s$  o la componente  $p$  estuvieran presentes. Por otro lado,  $J_{sp}$  y  $J_{ps}$  describen las correlaciones existentes entre las componentes  $s$  y  $p$  del campo en dos puntos (diferentes o coincidentes). Los elementos de la matriz dada por la Ec. (5.8) satisfacen la condición  $J_{ps}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = J_{sp}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, z)$ , de manera que cualquiera de los elementos no-diagonales de  $\hat{J}$  contiene toda la información sobre las correlaciones cruzadas.

Si evaluamos la matriz de coherencia-polarización,  $\hat{J}$ , en puntos coincidentes, esto es, imponemos  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ , obtenemos la matriz de polarización local,  $\hat{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z)$  [Cap.2 Sec. 2.2.2], que describe la polarización del haz en cada punto de su sección transversal pero que no proporciona ninguna información acerca de las correlaciones entre puntos distintos.

### 5.3. Una condición suficiente de no-negatividad para las matrices $\widehat{W}$

Se sabe que las funciones que describen las correlaciones de campos ópticos no se pueden elegir de forma arbitraria ya que deben satisfacer las condiciones de no-negatividad. En el caso escalar, las correlaciones entre dos puntos  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$  del plano de la fuente se describen a través de la función de densidad espectral mútua,  $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \omega)$  [MW95]. Omitiendo la dependencia con la frecuencia,  $\omega$ ,  $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$  representa una fuente físicamente realizable si para cualquier elección de la función  $f(\boldsymbol{\rho})$  se satisface la siguiente condición de no-negatividad [MW95]

$$Q = \int \int f^*(\boldsymbol{\rho}_1) f(\boldsymbol{\rho}_2) W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 \geq 0, \quad (5.9)$$

donde las integrales se extienden a todo el plano de la fuente.

Se ha demostrado que si la función  $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$  se puede expresar en la forma [GS07]

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \int p(\mathbf{u}) K^*(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}) K(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}) d^2 v, \quad (5.10)$$

siendo  $p(\mathbf{u})$  una función peso no-negativa arbitraria y  $K(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})$  un núcleo arbitrario, entonces la condición dada por la Ec. (5.9) se satisface de forma automática. Por tanto, la Ec. (5.10) constituye una condición suficiente que permite asegurar

que las funciones de densidad espectral mútua,  $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ , así construidas describen fuentes escalares físicamente realizables. A esta ecuación se le denomina “regla de superposición”.

En esta sección se extiende la condición (5.10) al caso vectorial. Para ello, se considera la matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ , que viene dada por la Ec. (5.3) evaluada en dos puntos  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$  del plano de la fuente ( $z = 0$ ). Y se define la forma cuadrática

$$Q = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \int \int f_{\alpha}^*(\boldsymbol{\rho}_1) f_{\beta}(\boldsymbol{\rho}_2) W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) d^2\rho_1 d^2\rho_2, \quad (5.11)$$

con  $\alpha, \beta = s, p$  y donde  $f_s(\cdot)$  y  $f_p(\cdot)$  son dos funciones (integrables) arbitrarias y las integrales se extienden a todo el plano de la fuente. Entonces, la condición de no-negatividad [MW95] implica que, para cualquier par de funciones  $f_s$  y  $f_p$ , la forma cuadrática  $Q$  debe ser no-negativa, es decir,

$$Q \geq 0. \quad (5.12)$$

Si se verifica la condición anterior se dice que la matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}$ , describe una fuente físicamente realizable.

Por analogía con el caso escalar, si la matriz  $\widehat{W}$  se puede expresar en la forma

$$W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \int p_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) K_{\alpha}^*(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}) K_{\beta}(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}) d^2u, \quad (5.13)$$

donde  $p_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  son los elementos de una matriz peso dada por

$$\widehat{p}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} p_{ss}(\mathbf{u}) & p_{sp}(\mathbf{u}) \\ p_{sp}^*(\mathbf{u}) & p_{pp}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

y  $K_s(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})$  y  $K_p(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})$  son dos núcleos cualesquiera, entonces basta imponer una serie de restricciones sobre los elementos de la matriz peso para que la condición de no-negatividad de la fuente se verifique de forma automática. Dichas condiciones se detallan a continuación:

En primer lugar, nótese que  $W_{ss}$  y  $W_{pp}$  tienen la misma estructura que las funciones de densidad espectral mútua del caso escalar. De hecho, si el haz pasa

a través de un polarizador lineal con eje de transmisión paralelo al eje  $s$  o  $p$ , el campo a la salida del mismo queda completamente descrito por una función escalar  $W_{\alpha\alpha}$  con  $\alpha = s$  ó  $p$ . De acuerdo con esto, los elementos diagonales de  $\hat{p}$  deben ser semi-definidos positivos

$$p_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}) \geq 0. \quad (5.15)$$

Insertando la Ec. (5.13) en Ec. (5.11) e intercambiando el orden de integración se obtiene

$$Q = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \int p_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) k_{\alpha}^*(\mathbf{v}) k_{\beta}(\mathbf{u}) d^2 u, \quad (5.16)$$

donde

$$k_{\alpha}(\mathbf{u}) = \int f_{\alpha}(\boldsymbol{\rho}) K_{\alpha}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}) d^2 \rho. \quad (5.17)$$

Teniendo en cuenta las desigualdades expresadas en la Ec. (5.15) resulta que  $Q$  es no-negativa si la condición

$$p_{ss}(\mathbf{u})p_{pp}(\mathbf{u}) - |p_{sp}(\mathbf{u})|^2 \geq 0, \quad (5.18)$$

se satisface para cualquier  $\mathbf{u}$ .

Las condiciones (5.15) y (5.18) implican que la matriz  $\hat{p}(\mathbf{u})$  es semi-definida positiva para cualquier  $\mathbf{u}$  y por tanto, la cantidad  $Q$  dada por la Ec. (5.11) es también no-negativa. Resumiendo, toda matriz  $\widehat{W}$  construida de acuerdo con la Ec. (5.13) satisface automáticamente la condición de no-negatividad, es decir, la Ec. (5.13) es una condición suficiente de no-negatividad. A la Ec. (5.13) se le denomina *regla de superposición generalizada*. La arbitrariedad en la elección de los elementos de la matriz  $\hat{p}(\mathbf{u})$  (sujeta a las ligaduras dadas por las Ecs. (5.15) y (5.18)) y de los núcleos  $K_{\alpha}$  permite construir gran cantidad de matrices de densidad espectral mútua que se corresponden con fuentes físicamente realizables.

La *regla de superposición generalizada* (Ec.(5.13)) representa la matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}$ , a la salida de un sistema óptico lineal alimentado con una fuente espacialmente incoherente cuya matriz de polarización local es proporcional a  $\hat{p}(\mathbf{u})$ . La acción sobre cada una de las componentes de polarización del campo de entrada viene dada, respectivamente, por los núcleos  $K_s$  y  $K_p$ . En el apéndice 5.A se detalla el funcionamiento de dicho sistema con el fin de

profundizar en el significado físico de la Ec. (5.13). Las diferencias entre  $K_s$  y  $K_p$  podrían deberse a la presencia de elementos anisótropos en el sistema óptico o bien a diseños interferométricos del sistema, donde estados de polarización ortogonales viajan por brazos distintos del interferómetro y encuentran elementos ópticos diferentes.

Desde el punto de vista matemático,  $K_s$  y  $K_p$  representan núcleos de transformaciones lineales (respecto de la variable  $\mathbf{u}$ ). El abanico de posibilidades para elegir los núcleos es muy amplio, de ahí se deriva que es posible construir una gran variedad de matrices  $\widehat{W}$  aplicando la “receta” que proporciona la Ec. (5.13). Ejemplos de transformaciones lineales que se podrían utilizar son la transformada de Fresnel, de Fourier, de Laplace o de Hankel. Basta elegir una de estas transformaciones para obtener matrices de densidad espectral mútua con características interesantes desde el punto de vista físico.

Por ejemplo, dotando a los núcleos  $K_\alpha$  de una estructura tipo Fourier, es decir,

$$K_\alpha(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}) = F_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \exp[-2\pi i \mathbf{g}_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{u}], \quad (5.19)$$

donde  $\mathbf{g}_\alpha$  son funciones reales vectoriales arbitrarias y  $F_\alpha$  son funciones que pueden ser complejas, e insertando la Ec. (5.19) en la Ec. (5.13) se obtiene una clase de matrices  $\widehat{W}$  dadas por

$$W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = F_\alpha^*(\boldsymbol{\rho}_1) F_\beta(\boldsymbol{\rho}_2) \widetilde{p}_{\alpha\beta}[\mathbf{g}_\beta(\boldsymbol{\rho}_2) - \mathbf{g}_\alpha(\boldsymbol{\rho}_1)]. \quad (5.20)$$

donde la tilde representa la transformada de Fourier de la función. Es evidente que los elementos  $W_{\alpha\beta}$  pueden tener estructuras tan diversas y sofisticadas como se quiera ya que las funciones  $\mathbf{g}_\alpha$  son arbitrarias.

En principio, la función  $\mathbf{g}_\alpha$  de la Ec. (5.19) podría ser tan extraña como se quisiera y siempre se obtendría una matriz de densidad espectral mútua válida. Sin embargo, para encontrar fuentes con características físicas interesantes basta elegir un ejemplo sencillo

$$\mathbf{g}_\alpha(\boldsymbol{\rho}) = a_\alpha \boldsymbol{\rho}; \quad \mathbf{g}_\beta(\boldsymbol{\rho}) = a_\beta \boldsymbol{\rho}, \quad (5.21)$$

donde  $a_\alpha$  y  $a_\beta$  son constantes. Con la elección anterior, la Eq. (5.20) se escribe

$$W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = F_\alpha^*(\boldsymbol{\rho}_1) F_\beta(\boldsymbol{\rho}_2) \widetilde{p}_{\alpha\beta}(a_\beta \boldsymbol{\rho}_2 - a_\alpha \boldsymbol{\rho}_1), \quad (5.22)$$

o, más explícitamente con  $\alpha = s$  y  $\beta = p$

$$\begin{aligned} W_{ss}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= F_s^*(\boldsymbol{\rho}_1)F_s(\boldsymbol{\rho}_2)\tilde{p}_{ss}[a_s(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)], \\ W_{pp}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= F_p^*(\boldsymbol{\rho}_1)F_p(\boldsymbol{\rho}_2)\tilde{p}_{pp}[a_p(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)], \\ W_{sp}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= F_s^*(\boldsymbol{\rho}_1)F_p(\boldsymbol{\rho}_2)\tilde{p}_{sp}(a_p\boldsymbol{\rho}_2 - a_s\boldsymbol{\rho}_1). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Puede verse que las transformadas de Fourier que aparecen en los elementos diagonales tienen factor de escala diferente si  $a_s \neq a_p$ . Pero en cualquier caso dependen únicamente de  $\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$ , es decir,  $W_{ss}$  and  $W_{pp}$  son del modelo Schell [SC67]. Sin embargo, en el caso del elemento no diagonal,  $W_{sp}$ , el comportamiento es diferente ya que  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$  van multiplicados, respectivamente, por factores distintos,  $a_s$  y  $a_p$ .

Si se estudia el caso límite  $a_s \neq 0$  y  $a_p = 0$ , es decir, se supone que  $W_{sp}$  no depende de  $\boldsymbol{\rho}_2$ , se pone en evidencia que, a diferencia de lo que ocurre con los elementos diagonales donde  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$  juegan esencialmente el mismo papel, no sucede lo mismo con los elementos no diagonales de  $W_{\alpha\beta}$ . De hecho, en la teoría escalar de la coherencia,  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$  son intercambiables (únicamente ocurre un cambio de signo en la fase al cambiar uno por el otro). Lo mismo sucede cuando se estudian los elementos diagonales de  $\widehat{W}$ , no es posible distinguir  $\boldsymbol{\rho}_1$  de  $\boldsymbol{\rho}_2$ . Por tanto, parece obvio que para distinguir dos puntos de una fuente de este tipo (Ec. (5.23)) hay que medir las correlaciones cruzadas, es decir, el elemento no-diagonal,  $W_{sp}$ .

Por otro lado si  $a_s = -a_p$ , la transformada de Fourier que aparece en  $W_{sp}$  depende de  $\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_1$ , mientras que los elementos diagonales siguen siendo invariantes bajo translaciones (“shift-invariant”). Este es el caso de las fuentes electromagnéticas especulares [BG09].

Por último, si el vector  $\mathbf{g}_\alpha(\boldsymbol{\rho})$  de la Ec. (5.19) es ortogonal a  $\boldsymbol{\rho}$  y proporcional a la longitud de este, aparece el fenómeno de “retorcimiento o enrollamiento” del haz (se verá un ejemplo concreto en la siguiente sección).

Con una elección tan sencilla como la anterior,  $\mathbf{g}_\alpha(\boldsymbol{\rho}) = a_\alpha\boldsymbol{\rho}$  y  $\mathbf{g}_\beta(\boldsymbol{\rho}) = a_\beta\boldsymbol{\rho}$ , ya se pone de manifiesto la gran variedad de matrices de densidad espectral mútua que se pueden construir aplicando la regla de superposición generalizada de la



Ec. (5.13). Por tanto, parece que es posible encontrar matrices  $W$  que hasta el momento no se han estudiado en la literatura trabajando con funciones  $\mathbf{g}_\alpha(\boldsymbol{\rho})$  más complejas.

## 5.4. Aplicación al caso gaussiano

En esta sección, se aplica *la regla de superposición generalizada* para construir la matriz de densidad espectral mútua asociada a una fuente vectorial anisótropa del modelo de Schell, es decir, donde las correlaciones se describen a través de funciones que dependen de  $\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$ . Para ello, deben elegirse adecuadamente las expresiones de los elementos de la matriz peso y de los núcleos de la transformación.

Se considera que los elementos de la matriz peso,  $p_{\alpha\beta}$ , tienen estructura gaussiana y que vienen dados por

$$p_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = A_{\alpha\beta} \exp(-\gamma_{\alpha\beta}u^2 - \varepsilon_{\alpha\beta}v^2). \quad (5.24)$$

donde  $A_{ss}$  y  $A_{pp}$  son constantes reales no-negativas, mientras que  $A_{sp} = A_{ps}^*$  puede ser compleja. También  $\gamma_{\alpha\beta}$  y  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  son no-negativas. Por último,  $(u, v)$  son las coordenadas del punto  $\mathbf{u}$ .

Los elementos diagonales,  $p_{\alpha\alpha}$  así definidos satisfacen la Ec. (5.15). Además, la condición (5.18) se verifica si

$$\begin{aligned} |A_{sp}|^2 &\leq A_{ss}A_{pp}, \\ \gamma_{sp} &\geq \frac{\gamma_{ss} + \gamma_{pp}}{2}; \quad \varepsilon_{sp} \geq \frac{\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{pp}}{2}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

En cuanto a los núcleos de la transformación, se asume que sean de la forma

$$K_\alpha(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}) = F_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \exp[-b_\alpha(\xi - u)^2 - c_\alpha(\eta - v)^2 - 2\pi i \mathbf{g}_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{u}], \quad (5.26)$$

donde  $b_\alpha$  y  $c_\alpha$  son constantes no negativas y  $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta)$ . Es decir, los núcleos tienen estructura tipo Fourier y al igual que los elementos de la matriz peso poseen un término gaussiano.

La expresión de la matriz  $\widehat{W}$  asociada a esta fuente electromagnética anisótropa de tipo Schell (EASM) puede obtenerse utilizando las expresiones (5.24) y (5.26) y aplicando la *regla de superposición generalizada* dada por la Ec. (5.13).

Alcanzado este punto, merece la pena detenerse a calcular el número de parámetros que habría que controlar para sintetizar esta fuente. En la Ec. (5.24) hay 10 parámetros diferentes ( $A_{ss}$ ,  $A_{pp}$ , el módulo y la fase de  $A_{sp}$ ,  $\gamma_{ss}$ ,  $\gamma_{pp}$ ,  $\gamma_{sp}$ ,  $\varepsilon_{ss}$ ,  $\varepsilon_{pp}$ ,  $\varepsilon_{sp}$ ), sujetos a las ligaduras de las Ecs. (5.25). Además, aparecen 4 parámetros  $b_s$ ,  $b_p$ ,  $c_s$  y  $c_p$  en las expresiones para los núcleos, y al menos otros cuatro asociados a las expresiones analíticas de  $F_s$ ,  $F_p$ ,  $\mathbf{g}_s$  y  $\mathbf{g}_p$ . Haciendo un recuento, parece que hay que controlar al menos 18 parámetros en el proceso de síntesis de la fuente. Una elección aleatoria del valor de todos estos parámetros probablemente conllevará la violación de la condiciones de no-negatividad que debe satisfacer  $W$ . La principal ventaja de la *regla de superposición generalizada* (Ec. (5.13)) es que orienta acerca de cómo debe realizarse dicha elección, es decir, se deben verificar las condiciones de la Ec. (5.25).

Por simplicidad, a continuación se estudia el caso isótropo más sencillo. Para ello se considera

$$\gamma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} = 0; \quad b_s = b_p = c_s = c_p = b. \quad (5.27)$$

Aplicando la Ec. (5.13) se obtiene

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= \frac{\pi A_{\alpha\beta} F_{\alpha}^*(\boldsymbol{\rho}_1) F_{\beta}(\boldsymbol{\rho}_2)}{2b} \exp \left[ -\frac{b(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2} \right] \\ &\times \exp \left\{ \frac{-\pi^2}{2b} [\mathbf{g}_{\beta}(\boldsymbol{\rho}_2) - \mathbf{g}_{\alpha}(\boldsymbol{\rho}_1)]^2 - \pi i (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2) \cdot [\mathbf{g}_{\beta}(\boldsymbol{\rho}_2) - \mathbf{g}_{\alpha}(\boldsymbol{\rho}_1)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

que son los elementos de la  $\widehat{W}$  de la fuente ESM isótropa cuyas características se analizan a continuación. Para ello, se estudian tres casos. El primero corresponde a fuentes electromagnéticas isótropas del modelo de Gauss-Schell donde tanto el término relativo a la coherencia como la irradiancia son funciones gaussianas [GS01, PG02, RK05, SK05, GS08], el segundo a fuentes electromagnéticas especulares [GG88, BG09], y por último, el tercero representa una clase de fuentes

que en la literatura se suelen denominar “Twisted Gaussian Schell-model sources” [SM93b, FT94, AB94]. Cada uno de estos ejemplos está ligado a una elección diferente de las funciones  $g_\alpha(\boldsymbol{\rho})$ :

En primer lugar, se considera

$$\mathbf{g}_x(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{g}_y(\boldsymbol{\rho}) = a\boldsymbol{\rho}, \quad (5.29)$$

de manera que la Ec. (5.28) se escribe

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= \frac{\pi A_{\alpha\beta} F_\alpha^*(\boldsymbol{\rho}_1) F_\beta(\boldsymbol{\rho}_2)}{2b} \exp \left[ -\frac{b(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2} \right] \\ &\times \exp \left\{ \frac{-\pi^2 a^2}{2b} (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2 - \pi i a (\boldsymbol{\rho}_2^2 - \boldsymbol{\rho}_1^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Si  $a = 0$  y las funciones  $F_\alpha$  se eligen de tipo gaussiano, la Ec. (5.30) representa un haz gaussiano electromagnético de tipo Schell ([WO07a], Sec. 9.4; [GS01, PG02, CG03, RK05, SK05]) que puede ser reescrito en la forma típica como

$$W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = B_{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta \exp \left[ -\frac{\rho_1^2}{4\sigma_\alpha^2} - \frac{\rho_2^2}{4\sigma_\beta^2} - \frac{(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2\delta_{\alpha\beta}^2} \right], \quad (5.31)$$

donde  $B_{\alpha\alpha} = 1$ ,  $B_{xy}$  (complejo) satisface la inecuación  $|B_{xy}| \leq 1$  y el resto de parámetros que aparecen en la Ec. (5.31) son constantes positivas. Las fuentes EGSM se caracterizan por tener perfil de irradiancia y grado de coherencia ambos de tipo gaussiano, en particular,  $\sigma_\alpha$  y  $\delta_{\alpha\beta}$  con  $\alpha, \beta = s$  ó  $p$  representan las anchuras de tales funciones gaussianas.

Por otro lado, si  $a \neq 0$  los elementos de matriz de la Ec. (5.30) además del término exponencial de tipo “shift-invariant” (invariante bajo translaciones) contienen una exponencial imaginaria. Este tipo de términos aparecen cuando un haz de tipo Gauss-Schell (GSM) se propaga una cierta distancia respecto del plano de la cintura ([WO07a], Sec. 9.4; [GO83]). Si  $a < 0$ , la Ec. (5.30) describe un haz GSM cuya cintura se encuentra en algún plano  $z < 0$ . Por el contrario, si  $a > 0$  el exponente imaginario tendrá signo contrario, dando lugar a un haz que converge hacia su cintura, localizada en algún plano  $z > 0$ .

En segundo lugar, se estudia el caso

$$\mathbf{g}_x(\boldsymbol{\rho}) = a\boldsymbol{\rho}; \quad \mathbf{g}_y(\boldsymbol{\rho}) = -a\boldsymbol{\rho}. \quad (5.32)$$

Entonces, los elementos diagonales de la matriz  $\widehat{W}$  vienen dados por

$$\begin{aligned} W_{xx}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= \frac{\pi A_{xx} F_x^*(\boldsymbol{\rho}_1) F_x(\boldsymbol{\rho}_2)}{2b} \exp \left[ -\frac{b(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2} \right] \\ &\times \exp \left\{ \frac{-\pi^2 a^2}{2b} (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2 - \pi i a (\boldsymbol{\rho}_2^2 - \boldsymbol{\rho}_1^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.33a)$$

$$\begin{aligned} W_{yy}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= \frac{\pi A_{yy} F_y^*(\boldsymbol{\rho}_1) F_y(\boldsymbol{\rho}_2)}{2b} \exp \left[ -\frac{b(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2} \right] \\ &\times \exp \left\{ \frac{-\pi^2 a^2}{2b} (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2 + \pi i a (\boldsymbol{\rho}_2^2 - \boldsymbol{\rho}_1^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.33b)$$

Si se supone, igual que en el ejemplo anterior, que  $F_x$  y  $F_y$  son de tipo gaussiano, las Ecs. (5.33a) y (5.33b) representan haces escalares de tipo GSM ([WO07a], Sec. 5.3). No obstante, como el signo del exponente imaginario es diferente en cada una de ellas, cuando  $a > 0$ ,  $W_{xx}$  describe un haz cuya cintura está en un plano  $z > 0$ , mientras que  $W_{yy}$  se refiere a un haz cuyo plano de la cintura se sitúa en la parte del espacio  $z < 0$ . Por otro lado, los elementos no-diagonales

$$\begin{aligned} W_{xy}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= \frac{\pi A_{xy} F_x^*(\boldsymbol{\rho}_1) F_y(\boldsymbol{\rho}_2)}{2b} \exp \left[ -\frac{b(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2} \right] \\ &\times \exp \left\{ \frac{-\pi^2 a^2}{2b} (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)^2 + \pi i a (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.33c)$$

no poseen una estructura de tipo Schell ya que en la segunda exponencial aparece un término que depende de  $\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2$ . A este tipo de fuentes, con correlaciones cruzadas dependientes de  $\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2$ , se les denomina fuentes electromagnéticas especulares [GG88, BG09].

Por último, si se eligen las funciones  $\mathbf{g}_\alpha$  de la forma

$$\mathbf{g}_x(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{g}_y(\boldsymbol{\rho}) = a\boldsymbol{\nu}, \quad (5.34)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  tienen la misma longitud ( $|\boldsymbol{\nu}| = |\boldsymbol{\rho}|$ ) pero son ortogonales ( $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho} = 0$ ). Realizando los cálculos pertinentes se obtienen las siguientes expresiones para los elementos de la matriz  $W$ :

$$W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \frac{\pi A_{\alpha\beta} F_{\alpha}^*(\boldsymbol{\rho}_1) F_{\beta}(\boldsymbol{\rho}_2)}{2b} \exp \left[ -\frac{b(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2} \right] \times \exp \left\{ \frac{-\pi^2 a^2}{2b} (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2 - 2\pi i a |\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2| \right\}. \quad (5.35)$$

donde  $F_{\alpha}$  y  $F_{\beta}$  son funciones cualesquiera, no necesariamente gaussianas. En este caso, las funciones de correlación son de tipo Schell con un factor de fase que da lugar al denominado fenómeno de retorcimiento o enrollamiento del haz (en la literatura, a este factor se le denomina “twist phase”) [SM93b, FT94, AB94]. Nótese que este tercer ejemplo generaliza el modelo escalar introducido en la Ref. [SM93b].

## 5.5. Apéndice

En este apéndice se estudia como actúa un sistema óptico lineal sobre el campo asociado a una fuente incoherente cuando se considera que la respuesta impulso de dicho sistema óptico es diferente para cada una de las componentes de polarización del campo de entrada.

Se considera un campo eléctrico que incide sobre un sistema óptico lineal. El campo eléctrico en el plano objeto, denotado con el superíndice “(o)”, del sistema viene dado por

$$\mathbf{E}^{(o)}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} E_s^{(o)}(\mathbf{u}) \\ E_p^{(o)}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}. \quad (5.A.1)$$

Las características del campo relacionadas con la coherencia se pueden describir a través de su matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}^{(o)}$ , cuyos elementos son (ver Sec. 5.2.1)

$$W_{\alpha\beta}^{(o)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \langle E_{\alpha}^{(o)*}(\mathbf{u}_1) E_{\beta}^{(o)}(\mathbf{u}_2) \rangle. \quad (5.A.2)$$

El sistema actúa de forma diferente sobre cada una de las componentes ortogonales de polarización,  $s$  y  $p$ , es decir, las respuestas impulso características del

sistema son  $K_s(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})$  y  $K_p(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})$ , de modo que el campo en el plano imagen del sistema viene dado por

$$E_\alpha^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \int E_\alpha^{(o)}(\mathbf{u}) K_\alpha(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}) d\mathbf{u} , \quad (5.A.3)$$

donde la integral se realiza sobre toda la región que ocupa el plano objeto. Por tanto, los elementos de la matriz  $\widehat{W}$  en el plano imagen son

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= \langle E_\alpha^{(i)*}(\boldsymbol{\rho}_1) E_\beta^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_2) \rangle \\ &= \langle \iint E_\alpha^{(o)*}(\mathbf{u}_1) E_\beta^{(o)}(\mathbf{u}_2) K_\alpha^*(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}_1) K_\beta(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}_2) d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 \rangle \\ &= \iint W_{\alpha\beta}^{(o)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) K_\alpha^*(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}_1) K_\beta(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}_2) d\boldsymbol{\rho}_1 d\boldsymbol{\rho}_2 . \end{aligned} \quad (5.A.4)$$

Cuando la fuente situada en el plano objeto del sistema es espacialmente incoherente, su matriz  $\widehat{W}$  está dada, salvo un factor de proporcionalidad constante, por

$$W_{\alpha\beta}^{(o)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \langle E_\alpha^{(o)*}(\mathbf{u}_1) E_\beta^{(o)}(\mathbf{u}_2) \rangle \delta(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = p_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_1) \delta(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) , \quad (5.A.5)$$

donde la función  $\delta$  es la delta de Dirac y  $p_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  es un elemento de la matriz de polarización asociada a la fuente incoherente y calculada en el plano de la misma. En tal caso, los elementos de la matriz de densidad espectral mútua en el plano imagen,  $\widehat{W}^{(i)}$ , son de la forma

$$W_{\alpha\beta}^{(i)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \int p_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) K_\alpha^*(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}) K_\beta(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}) d\mathbf{u} , \quad (5.A.6)$$

es decir, se obtiene la *regla de superposición generalizada*.



## Capítulo 6

# Síntesis de haces del modelo de Schell mediante sistemas interferométricos de tipo Mach-Zehnder

### 6.1. Introducción

En la teoría escalar de la coherencia las fuentes del modelo de Schell (SM) se introdujeron como una herramienta para describir fuentes de luz parcialmente coherentes con grado de coherencia espacial invariante bajo translaciones (en inglés, 'shift-invariant') [SC67, MW95]. Este tipo de fuentes se han utilizado para describir la luz que emiten ciertas fuentes naturales [BW99, GO70]. Por ejemplo, la luz que emiten las estrellas, cuando se observa desde la tierra, presenta un grado de coherencia espacial de tipo Schell.

Como las fuentes escalares del modelo de Schell se pueden sintetizar de forma sencilla en el laboratorio partiendo de una fuente espacialmente incoherente [SG79, SG86], se han utilizado para comprobar experimentalmente diversos resultados de la teoría escalar de la coherencia [GR82, DC83, SG86, IN89, TV91, SM93b, FT94, BG06, GS06].

El modelo de Schell se ha generalizado al caso vectorial y del mismo mo-



do que en el caso escalar, las fuentes electromagnéticas de tipo Schell (ESM) están jugando un papel importante en el desarrollo de la teoría vectorial de la coherencia [WO07a]. En particular, se está prestando mucha atención a las denominadas fuentes electromagnéticas de tipo Gauss-Schell (EGSM) [SE99, GS01] que han sido introducidas como una generalización natural al caso vectorial de las fuentes Gauss-Schell escalares (GSM). Las fuentes EGSM se han utilizado para estudiar haces electromagnéticos estocásticos y han servido para descubrir propiedades de coherencia y de polarización desconocidas hasta el momento [JA94, SE00, SH05, WO03, TS04, RW05, KS05, RA06, GS06, LL06, LU06, SB06, VT06, PK07, SG07, VJ08, ZZ08][18-33].

La síntesis de fuentes electromagnéticas del modelo de Schell, desde el punto de vista experimental, es una tarea difícil. Hasta el momento, únicamente se han propuesto algunos procedimientos para sintetizar algunas fuentes EGSM [PG02, SK05]. El primero de ellos se presentó en 2002 y permite sintetizar un tipo particular de fuentes electromagnéticas del modelo de Gauss-Schell [PG02]. En este procedimiento se utilizaba el teorema de van Cittert-Zernike [GS00] y más adelante se verá que constituye un caso particular del método de síntesis que se propone en este capítulo. En 2005, se propuso otro método con el que se pueden generar haces EGSM sin recurrir al teorema de van Cittert-Zernike. Aquí, la fuente se sintetiza superponiendo dos haces espacialmente coherentes con polarizaciones ortogonales, fases moduladas a través de dos moduladores espaciales de cristal líquido mutuamente correlacionados y amplitudes moduladas con filtros en amplitud gaussianos [SK05]. Incluso en este caso, las fuentes que se pueden obtener son un subconjunto de la clase general EGSM.

En este capítulo se presenta un procedimiento mediante el cual se puede generar cualquier fuente electromagnética del modelo de Schell. El método que se propone se basa en la aplicación de la “regla de superposición generalizada” que se introdujo en el capítulo anterior y que está íntimamente relacionada con la generalización del teorema de van Cittert-Zernike al caso de haces parcialmente polarizados.

En el tratamiento escalar, para sintetizar una fuente de tipo Schell se aplica el teorema de van Cittert-Zernike sobre una fuente primaria con intensidad mútua espacialmente incoherente. La intensidad mútua de la fuente incoherente debe

ser tal que al realizar la transformada de Fourier de la misma resulte una fuente con intensidad mútua de tipo Schell (ver el Apéndice A). En el caso vectorial, la fuente primaria espacialmente incoherente de partida es necesario que venga caracterizada por una matriz de polarización dependiente del punto adecuada, de manera que al aplicar la regla de superposición generalizada resulte la fuente electromagnética de tipo Schell deseada. La primera fase del método que se propone en este capítulo se centra en la síntesis de dicha fuente primaria incoherente y no-uniformemente polarizada. En la segunda fase, de forma análoga al caso escalar, se aplica el teorema de van Cittert-Zernike de manera que la fuente adquiere las propiedades de coherencia deseadas [véase el Apéndice B de este capítulo].

Controlar la distribución de irradiancia y el estado de polarización de la fuente espacialmente incoherente no es fácil desde el punto de vista experimental. El procedimiento de síntesis que se propone en este capítulo se basa en la idea de que cualquier matriz de polarización (Cap. 2, Sec. 2.2.2.) se puede sintetizar superponiendo incoherentemente dos haces totalmente polarizados, con estados de polarización ortogonales y amplitudes elegidas convenientemente. Para superponer dichos haces se utiliza un interferómetro de tipo Mach-Zehnder y se colocan transmitancias en amplitud y elementos ópticos anisótropos en sus brazos con el fin de dotar a la fuente de la distribución de polarización deseada.

## 6.2. Condiciones de realizabilidad

En primer lugar se estudian las condiciones de realizabilidad de las fuentes que se podrán sintetizar mediante el dispositivo óptico que se propone en la siguiente sección, es decir, fuentes electromagnéticas del modelo de Schell (ESM). Para obtener dichas condiciones de realizabilidad se utilizan los resultados del Capítulo 5. En lo que sigue se supondrá que el campo es quasi-monocromático, por ello, se utilizará la matriz de coherencia-polarización en lugar de la matriz de densidad espectral mútua.

Los elementos de la matriz de coherencia-polarización (matriz BCP) [GO98, GS98] que caracteriza una fuente general del modelo de Schell son de la for-

ma [MW95, WO07a]:

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = s_\alpha(\boldsymbol{\rho}_1) s_\beta(\boldsymbol{\rho}_2) j_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2), \quad (6.1)$$

siendo  $j_{\alpha\beta}$  los denominados grados de coherencia espacial normalizados y

$$s_\alpha(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho})}, \quad (6.2)$$

con  $\alpha, \beta = s, p$  y  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$  dos puntos cualesquiera del plano transversal de la fuente. Los elementos diagonales de la matriz de coherencia-polarización representan funciones escalares de correlación, por tanto,  $s_\alpha$  es una función no-negativa [MW95]. Por otro lado,  $j_{\alpha\alpha}$  tienen las mismas propiedades que el grado de coherencia espacial en el caso escalar, y por tanto, su transformada de Fourier (que se denota con tilde) debe ser no-negativa en cualquier punto del plano de Fourier,  $\mathbf{u}$ , esto es [SG86]

$$\tilde{j}_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}) \geq 0. \quad (6.3)$$

La elección de la expresión analítica de los elementos no-diagonales debe hacerse de forma que la matriz de coherencia-polarización satisfaga la condición de no-negatividad [MW95]. Dicha condición, para fuentes electromagnéticas dadas por la Ec. (6.1), supone imponer que la siguiente forma cuadrática

$$Q = \sum_{\alpha=s,p} \sum_{\beta=s,p} \int \int j_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) f_\alpha^*(\boldsymbol{\rho}_1) f_\beta(\boldsymbol{\rho}_2) d^2\rho_1 d^2\rho_2 \quad (6.4)$$

sea no-negativa para cualquier elección de  $f_s$  y  $f_p$ , que son funciones (integrables) arbitrarias. Nótese que por ser las funciones  $s_\alpha \geq 0$  únicamente los grados de correlación normalizados,  $j_{\alpha\beta}$ , están involucrados en la condición  $Q \geq 0$ .

Expresando las funciones  $j_{\alpha\beta}$  a través de su transformada de Fourier,

$$j_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) = \int \tilde{j}_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \exp[2\pi i \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)] d^2u, \quad (6.5)$$

e insertando estas expresiones en la Ec. (6.4), se obtiene

$$Q = \sum_{\alpha=s,p} \sum_{\beta=s,p} \int \tilde{f}_\alpha^*(\mathbf{u}) \tilde{f}_\beta(\mathbf{u}) \tilde{j}_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) d^2u. \quad (6.6)$$

Además, teniendo en cuenta la relación

$$\tilde{j}_{ps}(\mathbf{u}) = \tilde{j}_{sp}^*(\mathbf{u}), \quad (6.7)$$

que es consecuencia de la propiedad  $j_{sp}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) = j_{ps}^*(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)$  [GS98], la Ec. (6.6) puede escribirse como sigue

$$Q = \int \left[ |\tilde{f}_s(\mathbf{u})|^2 \tilde{j}_{ss}(\mathbf{u}) + |\tilde{f}_p(\mathbf{u})|^2 \tilde{j}_{pp}(\mathbf{u}) + 2 \operatorname{Re}\{\tilde{f}_s^*(\mathbf{u}) \tilde{f}_p(\mathbf{u}) \tilde{j}_{sp}(\mathbf{u})\} \right] d^2u, \quad (6.8)$$

donde  $\tilde{j}_{\alpha\alpha}$ , ( $\alpha = s, p$ ) son funciones no negativas, como ya se dijo anteriormente.

Para que  $Q$  sea no negativa ( $Q \geq 0$ ) se debe verificar, para cualquier valor de  $\mathbf{u}$ , la desigualdad

$$|\tilde{j}_{sp}(\mathbf{u})| \leq \sqrt{\tilde{j}_{ss}(\mathbf{u}) \tilde{j}_{pp}(\mathbf{u})}. \quad (6.9)$$

La expresión de la Ec. (6.9) es una condición suficiente para la no-negatividad de la matriz de coherencia-polarización de cualquier fuente ESM dada por la Ec. (6.1).

### 6.3. Procedimiento para la síntesis de fuentes electromagnéticas de tipo Schell

El esquema que se propone para la síntesis de fuentes electromagnéticas del modelo de Schell (ESM) se basa en un sistema óptico que realiza la transformada de Fourier de una fuente incoherente previamente generada seguido de un filtro en amplitud (véase Fig. 6.1).

La función de transmisión del filtro,  $t_\alpha(\boldsymbol{\rho})$  con  $\alpha = s$  o  $p$ , puede ser diferente para cada una de las componentes de polarización del campo. Para conseguir esto se puede proceder como sigue: se separan dichas componentes usando, por ejemplo, un divisor de haz polarizador, se propagan a través de dos filtros en amplitud diferentes,  $t_s$  y  $t_p$ , colocados en los brazos de un interferómetro de tipo Mach-Zehnder y finalmente se vuelven a recombinar mediante otro divisor de haz (ver Fig. 6.2). En la Fig. 6.2,  $\Pi_o$  es el plano de salida del sistema óptico de la Fig. 6.1, la lente  $L_1$  forma la imagen del campo que se tiene en el plano  $\Pi_o$  sobre los planos donde se sitúan las transmitancias en amplitud,  $t_s$  y  $t_p$ , y la lente  $L_2$  forma la imagen del campo que se tiene a la salida de las transmitancias en el

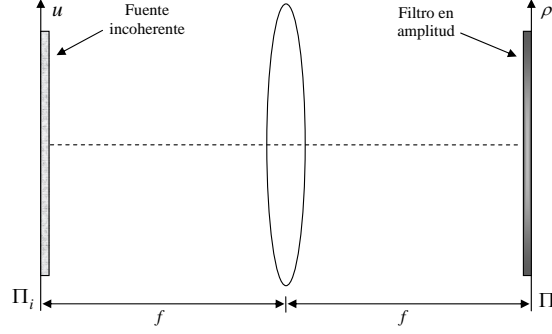


Figura 6.1: Sistema óptico que se utiliza en la síntesis de fuentes electromagnéticas de tipo Schell para realizar la transformada de Fourier

plano  $\Pi_{o'}$ . Evidentemente, no es necesario hacer todo esto si se elige  $t_s(\boldsymbol{\rho}) = t_p(\boldsymbol{\rho})$ , en cuyo caso, basta con un único filtro que se coloca directamente en el plano  $\Pi_o$ .

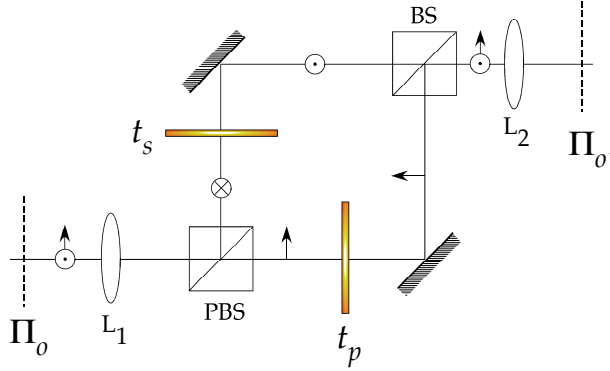


Figura 6.2: Sistema óptico para generar un filtro cuya función de transmisión,  $t_\alpha(\boldsymbol{\rho})$ , sea diferente para cada una de las componentes de polarización del campo.

La respuesta de impulso del sistema óptico representado en la Fig. 6.1 viene dada, para cada una de las componentes del campo, por

$$K_\alpha(\boldsymbol{\rho}; \mathbf{u}) = t_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f} \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u}\right), \quad (6.10)$$

siendo  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  puntos pertenecientes al plano de entrada,  $\Pi_i$ , y al plano de salida,

$\Pi_o$ , respectivamente,  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación y  $f$  la distancia focal de la lente.

Se considera que en el plano  $\Pi_i$  existe una fuente cuasi-monocromática espacialmente incoherente (generada previamente). En dicho plano, la matriz  $\hat{P}(\mathbf{u})$  describe el estado de polarización de la radiación emitida por dicha fuente. Los elementos de la matriz BCP,  $J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ , a la salida del sistema de la Fig. 6.1, es decir, en el plano  $\Pi_o$ , pueden calcularse utilizando la regla de superposición generalizada que, por analogía a la obtenida para la matriz de densidad espectral mútua (Cap. 5, Sec. 5.3), viene dada por

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \int P_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) K_{\alpha}(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}) K_{\beta}^*(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}) d^2u, \quad (6.11)$$

donde  $P_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  son los elementos de la matriz de polarización  $\hat{P}(\mathbf{u})$ . Nótese que, salvo factores de curvatura, la transformación lineal que realiza el sistema óptico propuesto (sistema de la Fig. 6.1) es equivalente a dejar que el haz se propague libremente en condiciones de Fraunhofer, por esta razón, la Ec. (6.11) es equivalente al teorema de van Cittert-Zernike para fuentes electromagnéticas [GS00].

Usando las Ecs. (6.10) y (6.11) junto con la Ec. (6.2), se observa que la fuente ESM descrita por la Ec. (6.1) se puede obtener a la salida del sistema óptico de la Fig. 6.1, si éste se alimenta con una fuente primaria, espacialmente incoherente caracterizada por una matriz de polarización dependiente del punto,  $\hat{P}(\mathbf{u})$ , dada por los siguientes elementos de matriz

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \tilde{J}_{\alpha\beta} \left( \frac{\mathbf{u}}{\lambda f} \right), \quad (6.12)$$

y si se sitúa en el plano  $\Pi_o$  un filtro en amplitud con función de transmitancia

$$t_{\alpha}(\boldsymbol{\rho}) = s_{\alpha}(\boldsymbol{\rho}). \quad (6.13)$$

Es importante remarcar que la fuente incoherente del plano  $\Pi_i$  será físicamente realizable si se verifican las condiciones (6.3) y (6.9). De hecho, para que una fuente incoherente sea realizable, su matriz de polarización,  $\hat{P}(\mathbf{u})$ , debe ser hermítica, semi-definida positiva y con elementos diagonales no-negativos en cualquier punto de la fuente.

La hermiticidad de  $\hat{P}(\mathbf{u})$  es consecuencia directa de las Ecs. (6.12) y (6.7), mientras que la Ec. (6.3) asegura que los elementos diagonales sean positivos. Por otro lado, para que  $\hat{P}$  sea semi-definida positiva su determinante debe ser no-negativo, es decir,

$$P_{ss}(\mathbf{u}) P_{pp}(\mathbf{u}) \geq |P_{sp}(\mathbf{u})|^2 \quad (6.14)$$

para cualquier  $\mathbf{u}$ . Teniendo en cuenta la Ec. (6.12), la condición anterior también se escribe

$$\tilde{j}_{ss}\left(\frac{\mathbf{u}}{\lambda f}\right) \tilde{j}_{pp}\left(\frac{\mathbf{u}}{\lambda f}\right) \geq \left|\tilde{j}_{sp}\left(\frac{\mathbf{u}}{\lambda f}\right)\right|^2, \quad (6.15)$$

que es equivalente a la condición expresada a través de la Ec. (6.9).

Recapitulando, si previamente se ha generado una fuente incoherente cuya matriz de polarización es  $\hat{P}(\mathbf{u})$ , cualquier fuente electromagnética del modelo de Schell puede sintetizarse a través del procedimiento que se acaba de describir.

### 6.3.1. Síntesis de la fuente incoherente espacial

En este punto se propone un método para generar una fuente primaria espacialmente incoherente que se utiliza como fuente de entrada al sistema óptico anteriormente descrito. El método consta de dos fases, en la primera se sintetiza la matriz de polarización dependiente del punto,  $\hat{P}(\mathbf{u})$ , asociada a dicha fuente y en la segunda, se elimina la coherencia de la misma. La primera etapa es la más compleja desde el punto de vista experimental. En algún caso particular, se ha conseguido llevar a cabo la síntesis experimental de dicha fuente incoherente [PG02], pero en general, no es una tarea experimental fácil pues supone controlar tanto la irradiancia como el estado de polarización punto a punto. Además, la construcción de la matriz  $\hat{P}(\mathbf{u})$  debe llevarse a cabo teniendo en cuenta la condición (6.12). Una vez que se ha dotado a la fuente con las características de polarización deseadas, en la segunda etapa, se hace pasar el haz a través de una lámina esmerilada rotatoria para eliminar la coherencia espacial de la misma.

En primer lugar, se estudia cómo generar la distribución de polarización no-uniforme que caracterizará a la fuente primaria. El método que se describe a continuación, basado en la descomposición modal de la matriz de polarización, permite sintetizar cualquier distribución de polarización.

Se sabe que cualquier matriz de polarización se puede expresar a través de la denominada *descomposición modal* [BE61], que se escribe

$$\hat{P} = \mu_+ \mathbf{U}_+ \mathbf{U}_+^\dagger + \mu_- \mathbf{U}_- \mathbf{U}_-^\dagger, \quad (6.16)$$

donde  $\mu_\pm$  son los autovalores de  $\hat{P}$ ,  $\mathbf{U}_\pm$  los correspondientes autovectores (representados por vectores columna) y la “daga” representa al vector adjunto, es decir, un vector fila cuyos elementos son los complejos conjugados de los elementos de  $\mathbf{U}_\pm$ . Para que esta matriz de polarización esté bien definida los autovalores deben ser reales no-negativos y los autovectores ortonormales entre sí.

El significado físico de la expansión (6.16) es el siguiente: cualquier matriz de polarización puede sintetizarse superponiendo incoherentemente dos campos completamente y ortogonalmente polarizados, descritos por los vectores de Jones  $\mathbf{U}_\pm$ , con potencias  $\mu_\pm$ .

Los autovalores y los autovectores de  $\hat{P}$  vienen dados, respectivamente, por las expresiones

$$\mu_\pm = \frac{1}{2} \left[ (P_{ss} + P_{pp}) \pm \sqrt{(P_{ss} - P_{pp})^2 + 4|P_{sp}|^2} \right], \quad (6.17)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_+ &= \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \begin{bmatrix} \eta e^{i\varphi} \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}_- &= \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \begin{bmatrix} -e^{i\varphi} \\ \eta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde

$$\eta = \frac{(P_{ss} - P_{pp}) + \sqrt{(P_{ss} - P_{pp})^2 + 4|P_{sp}|^2}}{2|P_{sp}|}, \quad (6.19)$$

y  $\varphi$  es el argumento del número complejo  $P_{sp}$ . Los elementos de la matriz de polarización,  $P_{\alpha\beta}$ , dependen de  $\mathbf{u}$  ya que dicha matriz representa una fuente incoherente con distribución de polarización, en general, no-uniforme. Debido a esta dependencia tanto  $\eta$  como la fase  $\varphi$  son funciones de  $\mathbf{u}$ . Además, de la Ec. (6.19) se deduce que  $\eta \geq 0$  para todo  $\mathbf{u}$ , y que  $\eta$  puede tomar cualquier valor, incluidos los valores límite cero e infinito, que se corresponden con los modos polarizados según  $s$  y  $p$ .



La simetría en la estructura modal (véase Ec. (6.18)) sugiere un procedimiento para generar la fuente espacialmente incoherente que, como ya se ha dicho, se utiliza como fuente primaria para sintetizar la fuente ESM. El dispositivo propuesto se representa de forma esquemática en la Fig. 6.3. Consiste en un interferómetro de tipo Mach-Zehnder (M-Z) alimentado con dos haces láser monocromáticos e independientes ( $\ell_{\pm}$ ), linealmente polarizados a  $45^\circ$  respecto del plano de incidencia que entran simultáneamente en el interferómetro incidiendo sobre caras perpendiculares de un divisor de haz polarizador.

Considérese en primer lugar la Fig. 6.3 (a). El haz láser  $\ell_+$ , una vez expandido y colimado, pasa a través de una transmitancia en amplitud situada en el plano transversal  $\Pi_+$  cuya función de transmisión característica es  $\tau_+ = A\sqrt{\mu_+}$ . El parámetro  $A$  es un factor de proporcionalidad arbitrario que puede elegirse a voluntad, por ejemplo, de manera que el valor máximo de  $\tau_+$  sea 1.

El divisor de haz polarizador (PBS) separa las componentes de polarización ortogonales del haz incidente de manera que envía la componente reflejada (polarizada en la dirección  $p$ ) al brazo superior del interferómetro y la componente transmitida (polarizada según  $s$ ) al brazo inferior. La lente  $L_+$  forma la imagen del campo que emerge del plano  $\Pi_+$  en los planos  $\Pi_\ell$  y  $\Pi_u$  situados, respectivamente, en los brazos inferior y superior del M-Z. Los subíndices  $\ell$  y  $u$  (del inglés “low” and “up”) se refieren, respectivamente, al brazo inferior y superior del interferómetro. En los planos  $\Pi_\ell$  y  $\Pi_u$  se sitúan dos transmitancias en amplitud cuyas funciones de transmisión son, respectivamente,  $\eta_\ell = \eta/\sqrt{1+\eta^2}$  y  $\eta_u = 1/\sqrt{1+\eta^2}$ . Por tanto, la componente  $s$  del campo queda multiplicada por  $\eta_\ell$  y la componente  $p$  por  $\eta_u$ . Nótese que las funciones  $\eta_\ell$  y  $\eta_u$  únicamente toman valores comprendidos entre 0 y 1. Finalmente, la lente  $L$  forma las imágenes de los campos que emergen de los planos  $\Pi_\ell$  y  $\Pi_u$  y ambas imágenes se superponen en el plano  $\Pi_i$  mediante un divisor de haz no-polarizador (BS). Se asume, sin pérdida de generalidad, que los caminos ópticos de los dos brazos del interferómetro son iguales (o difieren en un número entero de longitudes de onda, esto es, son congruentes módulo  $\lambda$ ).

La diferencia de fase  $\varphi$  entre las componentes  $s$  y  $p$  que aparece en la expresión de los modos se puede introducir a través de un elemento óptico anisótropo

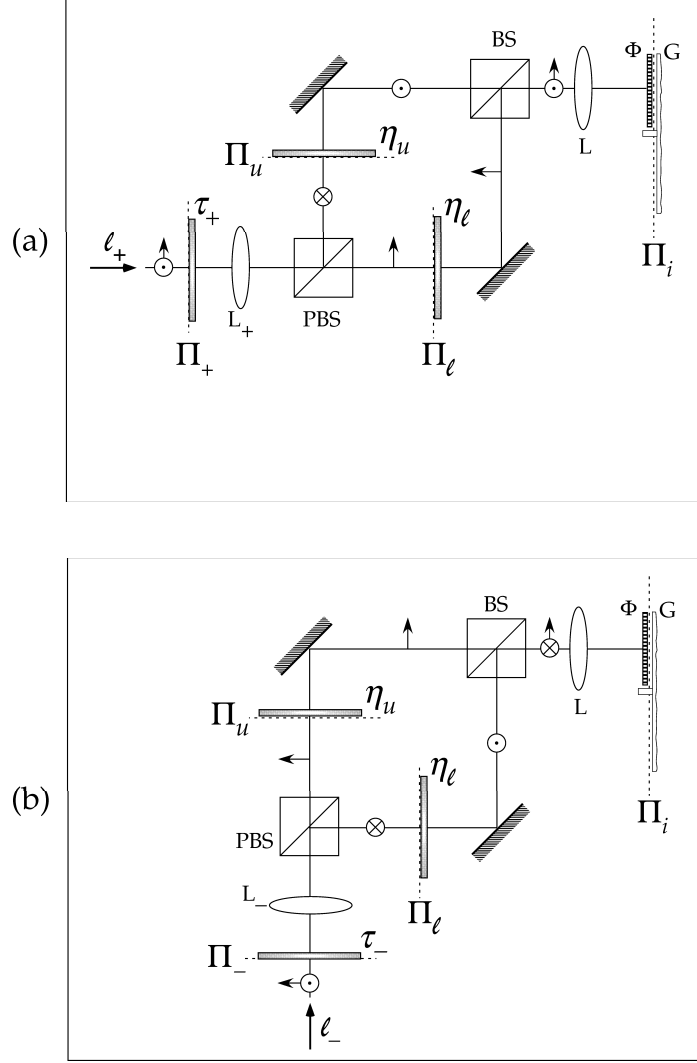


Figura 6.3: Interferómetro de tipo Mach-Zehnder alimentado con dos haces láser independientes  $\ell_+$  (a) y  $\ell_-$  (b) utilizado para síntesis de la fuente incoherente.

(representado como  $\Phi$  en la Fig. 6.3) situado en el plano  $\Pi_i$ . Dicho elemento podría ser, por ejemplo, una lámina fabricada con material birrefringente que tuviese espesor localmente variable. La radiación que emerge de dicha lámina pasa

a continuación por una lámina de vidrio esmerilado rotatoria (G) que elimina la coherencia espacial de la misma, dando lugar, en el plano  $\Pi_i$ , a una fuente espacialmente incoherente cuya matriz de polarización es  $\hat{P}_+ = \mu_+ \mathbf{U}_+ \mathbf{U}_+^\dagger$  que se corresponde con el primer término de la Ec. (6.16).

Como el elemento de fase  $\Phi$  y el vidrio esmerilado G deberían estar situados en el mismo plano, a la hora de implementar experimentalmente el sistema, se podría utilizar una lente convergente que proporcione la imagen del campo a la salida de  $\Phi$  en el plano donde se sitúa el elemento G, o viceversa. No obstante, es importante remarcar que para sintetizar fuentes ESM tales que el argumento de  $P_{sp}$  sea independiente de la coordenada espacial  $\mathbf{u}$ ,  $\Phi$  consiste simplemente en una lámina de fase convencional, que se usa para introducir un desfase espacialmente uniforme entre las dos componentes de polarización del campo. En tal caso, la síntesis de la fuente se lleva a cabo utilizando únicamente elementos ópticos convencionales y transmitancias en amplitud. En la siguiente sección estudiaremos un ejemplo de este tipo.

Por otro lado, en la Fig. 6.3 (b) se esquematiza el proceso de síntesis del segundo término de la Ec. (6.16), es decir,  $\hat{P}_- = \mu_- \mathbf{U}_- \mathbf{U}_-^\dagger$ . En el mismo interferómetro pero sobre otra cara del divisor de haz polarizante se incide con otro haz láser,  $\ell_-$ , polarizado también a  $45^\circ$ . La lente  $L_-$  forma la imagen del campo a la salida de la transmitancia  $\tau_- = A\sqrt{\mu_-}$  (situada en el plano  $\Pi_-$ ). En este caso, la función del PBS se “invierte”, es decir, la componente reflejada del haz (polarizada según  $p$ ) viaja por el brazo inferior del interferómetro y pasa a través de la transmitancia  $\eta_\ell$ , mientras que la componente transmitida (polarizada según  $s$ ) se propaga por el brazo superior y es modulada por  $\eta_u$ . Como en el caso anterior, las dos componentes se vuelven a recombinar en el BS de la salida del M-Z y sus imágenes a través de la lente  $L$  se observan en el plano  $\Pi_i$ . Pero dichas componentes están en oposición de fase ya que en el interior del interferómetro, la componente  $p$  del campo eléctrico sufre más reflexiones que en el caso anterior (véase Fig. 6.3). De nuevo, la diferencia de fase  $\varphi$  entre las componentes ortogonales del campo que aparece en la expresión del vector de Jones del modo  $\mathbf{U}_-$  se introduce a través del elemento  $\Phi$ .

Si ambos haces  $\ell_+$  y  $\ell_-$  inciden simultáneamente en el interferómetro, en el plano  $\Pi_i$  se genera una fuente espacialmente incoherente y en general, no-

uniformemente polarizada, cuya distribución de polarización vendrá descrita en términos de la matriz de polarización,  $\hat{P}(\mathbf{u})$ , siguiente

$$\hat{P}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mu_+ \eta_\ell^2 + \mu_- \eta_u^2 & \eta_u \eta_\ell (\mu_+ - \mu_-) e^{i\varphi} \\ \eta_u \eta_\ell (\mu_+ - \mu_-) e^{i\varphi} & \mu_+ \eta_u^2 + \mu_- \eta_\ell^2 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

En particular, si las transmitancias situadas en los brazos del interferómetro se eligen de tipo binario (esto es, valen 0 ó 1), resulta que  $\eta_u(\mathbf{u}) \cdot \eta_\ell(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u}$ . Entonces ocurre que

$$\hat{P}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mu_+ \eta_\ell^2 + \mu_- \eta_u^2 & 0 \\ 0 & \mu_+ \eta_u^2 + \mu_- \eta_\ell^2 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

es decir, a la salida del sistema interferométrico se obtiene una fuente incoherente con grado de polarización

$$\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \frac{|\mu_+(\mathbf{u}) - \mu_-(\mathbf{u})|}{|\mu_+(\mathbf{u}) + \mu_-(\mathbf{u})|}, \quad (6.22)$$

que será nulo (fuente no-polarizada) sólo si las transmitancias  $\mu_+$  y  $\mu_-$  son iguales.

Finalmente, la fuente incoherente cuya matriz de polarización local viene dada, en general, por la Ec. (6.20) se utiliza en el sistema óptico de la Fig. (6.1) como fuente primaria, de manera que a la salida de éste, se obtiene una fuente vectorial de tipo Schell con las características de coherencia y polarización deseadas.

En la siguiente sección se aplicará el método de síntesis aquí propuesto al caso particular de los haces electromagnéticos del modelo de Gauss-Schell (EGSM).

## 6.4. Aplicación a la síntesis de fuentes electromagnéticas del modelo de Gauss-Schell

Una fuente EGSM se caracteriza a través de la siguiente matriz de coherencia-polarización [WO07a]:

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = I_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{\rho_1^2}{4\sigma_\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho_2^2}{4\sigma_\beta^2}\right) \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2\delta_{\alpha\beta}^2}\right], \quad (6.23)$$

donde  $\sigma_\alpha$ ,  $\delta_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = s, p$ ) son parámetros reales positivos. Además,  $I_{\alpha\alpha} > 0$ , mientras que  $I_{sp}(= I_{ps}^*)$  puede ser complejo.

Aunque el número de parámetros reales independientes para esta fuente es nueve, el valor de estos no puede elegirse arbitrariamente sino dentro de ciertos intervalos que se obtienen al imponer la condición de no-negatividad a la matriz de coherencia-polarización [GS01, RK05, GS08].

De hecho, la condición (6.15) asegura la no-negatividad de la matriz de coherencia-polarización, que para el haz dado por la Ec. (6.23) se escribe

$$I_{ss} I_{pp} \delta_{ss}^2 \delta_{pp}^2 \exp \left[ -\frac{2\pi^2(\delta_{ss}^2 + \delta_{pp}^2)}{\lambda^2 f^2} u^2 \right] \geq |I_{sp}|^2 \delta_{sp}^4 \exp \left( -\frac{4\pi^2 \delta_{sp}^2}{\lambda^2 f^2} u^2 \right), \quad (6.24)$$

y debe verificarse para cualquier  $u$ . Nótese que, tanto las funciones de la izquierda de la Ec. (6.24) como las de la derecha decrecen monótonamente, por tanto, evaluando dicha inecuación para los casos límite  $u \rightarrow 0$  y  $u \rightarrow \infty$ , se obtiene una “horquilla” para los valores de los parámetros de la fuente que se corresponden con casos físicamente realizables

$$\frac{\delta_{ss}^2 + \delta_{pp}^2}{2} \leq \delta_{sp}^2 \leq \delta_{ss} \delta_{pp} \frac{\sqrt{I_{ss} I_{pp}}}{|I_{sp}|}. \quad (6.25)$$

La fuente EGSM de la Ec. (6.23) puede obtenerse a la salida del sistema óptico de la Fig. 6.1 si la fuente espacialmente incoherente de partida (situada en el plano  $\Pi_i$ ) se caracteriza por una matriz de polarización local con elementos  $P_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  de la forma

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{2\pi I_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}^2}{\lambda^2 f^2} \exp \left( -\frac{2\pi^2 \delta_{\alpha\beta}^2}{\lambda^2 f^2} u^2 \right), \quad (6.26)$$

satisfaciendo la condición (6.25) y la función de transmitancia del filtro en amplitud situado en el plano  $\Pi_o$  es

$$t_\alpha(\boldsymbol{\rho}) = \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\sigma_\alpha^2} \right). \quad (6.27)$$

En este caso, la fase del elemento de matriz  $P_{sp}$  coincide con el argumento del parámetro complejo  $I_{sp}$  y, por tanto, es independiente de la coordenada espacial

*u.* Por esta razón, el elemento óptico  $\Phi$  que aparece en el dispositivo experimental de la Fig. 6.3 de la Sec. 6.3.1 es simplemente una lámina de retardo espacialmente uniforme. Por tanto, la síntesis de esta fuente (Ec. 6.23) puede llevarse a cabo utilizando únicamente transmitancias en amplitud y elementos ópticos convencionales. En lo que sigue, por simplicidad, se asume que  $I_{sp}$  sea real, de manera que se puede eliminar el elemento  $\Phi$  del dispositivo óptico.

A continuación, se estudia cómo deben ser las transmitancias en amplitud,  $\eta_\ell$ ,  $\eta_u$ ,  $\tau_+$  y  $\tau_-$ , que se utilizan en el interferómetro, para que resulten fuentes ESM físicamente realizables. En particular, se representan en la Fig. 6.4 las funciones de transmisión asociadas a dichas transmitancias para diferentes elecciones de los valores de los parámetros  $I_{\alpha\beta}$  y  $\delta_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = s, p$ ). Tales valores se han elegido teniendo en cuenta las limitaciones que impone la Ec. (6.25).

Los tres ejemplos estudiados se corresponden con tres tipos de fuentes EGSM, significativos desde el punto de vista físico. El primer caso (Fig. 6.4a) se corresponde con una fuente EGSM general con  $I_{ss} \neq I_{pp}$ ,  $I_{sp} \neq 0$  y  $\delta_{ss} \neq \delta_{pp}$ . El segundo (Fig. 6.4b), con una fuente donde correlaciones cruzadas son nulas ( $I_{sp} = 0$ ). Y por último, el tercero (Fig. 6.4c) se asocia con una fuente cuyas componentes ortogonales de polarización tienen igual amplitud ( $I_{ss} = I_{pp}$ ) y la misma anchura del grado de coherencia ( $\delta_{ss} = \delta_{pp}$ ). En las figuras las coordenadas espaciales y las distancias se han normalizado haciendo  $\sqrt{\lambda f} = 1$ , es decir,  $u/\sqrt{\lambda f} \rightarrow u$  y  $\delta_{\alpha\beta}/\sqrt{\lambda f} \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = x, y$ ).

El último ejemplo es exactamente el mismo caso que el estudiado en la Ref. [PG02]. Por tanto, el procedimiento de síntesis que se propone en la Sec. 2 de este capítulo, incluye como caso particular, al método descrito en dicho trabajo experimental [PG02], donde en primer lugar, se superponían dos fuentes espacialmente incoherentes a través de un interferómetro de tipo M-Z, una linealmente polarizada según  $s$  y la otra según  $p$ . Los perfiles de irradiancia eran, respectivamente, la suma y la diferencia de dos funciones gaussianas de diferente anchura y valor de “pico”. Y posteriormente, aplicando el teorema de van Cittert-Zernike a la fuente espacialmente incoherente obtenida a la salida del interferómetro se sintetizaba una fuente electromagnética de tipo Gauss-Schell (EGSM) caracteri-

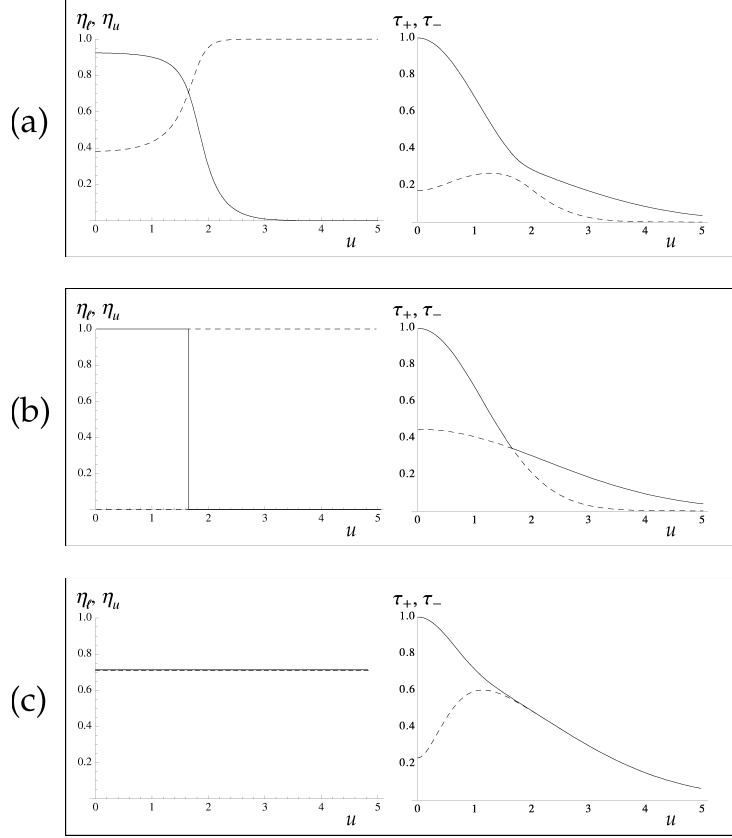


Figura 6.4: Funciones de transmisión ( $\eta_\ell$  and  $\tau_+$ : línea continua;  $\eta_u$  and  $\tau_-$ : línea punteada) de las transmitancias en amplitud que deben utilizarse en el sistema experimental propuesto para obtener distintos tipos de fuentes caracterizadas por los siguientes parámetros: a)  $I_{ss} = 1$ ,  $I_{pp} = 0.8$ ,  $I_{sp} = 0.4$ ,  $\delta_{ss} = 0.2$ ,  $\delta_{pp} = 0.1$ ,  $\delta_{sp} = 0.2$ ; b)  $I_{ss} = 1$ ,  $I_{pp} = 0.8$ ,  $I_{sp} = 0$ ,  $\delta_{ss} = 0.2$ ,  $\delta_{pp} = 0.1$ ,  $\delta_{sp} = 0.2$ ; c)  $I_{ss} = 1$ ,  $I_{pp} = 1$ ,  $I_{sp} = 0.1$ ,  $\delta_{ss} = 0.1$ ,  $\delta_{pp} = 0.1$ ,  $\delta_{sp} = 0.3$ .

zada por las siguientes relaciones entre parámetros  $I_{ss} = I_{pp}$ ,  $I_{sp} \neq 0$  y  $\delta_{ss} = \delta_{pp}$ . La matriz de coherencia-polarización asociada a la fuente EGSM así obtenida es diagonal pero, bajo una rotación de  $\pi/4$  sobre la dirección de polarización del campo, se transforma en una matriz no diagonal equivalente a la que se obtiene al aplicar el método descrito en este capítulo.

De hecho, si  $\delta_{ss} = \delta_{pp}$  y  $I_{ss} = I_{pp}$ , los elementos diagonales de  $\hat{P}$  son iguales,

esto es,  $P_{ss} = P_{pp}$ . Y por tanto, utilizando las Ecs. (6.17) y (6.19), se obtiene

$$\eta = 1, \quad (6.28)$$

en tal caso, la polarización de los dos modos,  $U_+$  y  $U_-$  es uniforme en el plano de la fuente. En particular, como se asume  $I_{sp}$  real, es decir,  $\varphi = 0$ , los dos modos resultan ser linealmente polarizados a  $\pm\pi/4$  (véase Ec. (6.18)). Por otro lado,  $\eta = 1$  implica que las dos transmitancias situadas en los brazos del interferómetro ( $\eta_u$  y  $\eta_\ell$ ) son idénticas y con función de transmitancia uniforme, y por tanto, pueden eliminarse del sistema. Además, los autovalores están dados por

$$\mu_{\pm} = P_{ss} \pm |P_{sp}|, \quad (6.29)$$

que son, respectivamente, la suma y la diferencia de dos funciones gaussianas (véase la Ec. (6.26)). En definitiva, estas dos funciones se corresponden con los perfiles de irradiancia de los dos campos no-correlados que se superponen en el plano  $\Pi_i$  del dispositivo propuesto en este capítulo y de los campos superpuestos en el experimento de la Ref. [PG02]. Para este tipo de fuentes, el grado de polarización local,  $\mathcal{P}(\mathbf{u})$ , también es gaussiano.

## 6.5. Apéndices

### Apéndice 6.A

En este apéndice se enuncia el teorema de van Cittert-Zernike y se aplica a la síntesis de fuentes escalares parcialmente coherentes del modelo de Schell.

En el tratamiento escalar, la intensidad mútua que caracteriza una fuente espacialmente incoherente es de la forma

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, 0) \propto I(\mathbf{u}_1) \delta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \quad (6.A.1)$$

donde la función  $\delta$  es la delta de Dirac bidimensional y  $I(\mathbf{u})$  es una función dependiente del punto que tiene unidades de intensidad.

Si  $K(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, z)$  representa al núcleo para la propagación libre desde el plano  $z = 0$  hasta el plano  $z = \text{constante} > 0$  [BW99], la función  $J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, 0)$  se



propaga de acuerdo con la fórmula

$$J(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \int J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, 0) K^*(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}_1, z) K(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}_2, z) d^2u_1 d^2u_2. \quad (6.A.2)$$

Sustituyendo la Ec. (6.A.1) en la Ec. (6.A.2) se puede calcular la intensidad mútua que describe el campo incoherente al propagarse.

Asumiendo que el eje  $z$  (perpendicular al plano de la fuente) coincide con la dirección de propagación, el núcleo para la propagación libre,  $K(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, z)$ , en aproximación paraxial viene dado por

$$K(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, z) = \frac{-i \exp(ikz)}{\lambda z} \exp \left[ \frac{ik}{2z} (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{u})^2 \right], \quad (6.A.3)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$ . Cuando las Ecs. (6.A.1) y (6.A.3) se introducen en la Ec. (6.A.2) se obtiene

$$J(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \frac{\exp \left[ \frac{ik}{2z} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \right]}{z^2} \int I(\mathbf{u}) \exp \left[ \frac{-2\pi i}{\lambda z} \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) \right] d^2u, \quad (6.A.4)$$

ecuación que expresa el teorema de van Cittert-Zernike en el caso escalar. Según este teorema, la radiación que emite una fuente escalar espacialmente incoherente adquiere cierto grado de coherencia al propagarse libremente, es decir, durante el proceso de propagación se genera coherencia espacial, el haz se hace más coherente. Si en lugar de considerar la propagación libre se considera la propagación desde el plano focal anterior (objeto) hasta el plano focal posterior (imagen) de una lente de focal  $f$ , dicha consideración es equivalente a utilizar la aproximación de Fraunhofer donde el núcleo es

$$K_f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}) \propto \exp \left[ \frac{i2\pi}{\lambda f} \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u} \right], \quad (6.A.5)$$

de manera que,

$$J_f(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \propto \tilde{I} \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1}{\lambda f} \right), \quad (6.A.6)$$

donde la tilde indica transformada de Fourier. Es decir, la intensidad mútua en el plano focal posterior es proporcional a la transformada de Fourier de la intensidad mútua que se tenía en el plano de la fuente.

Tras enunciar el teorema de van Cittert-Zernike se explica, a modo de ejemplo, cómo se aplica éste para sintetizar fuentes escalares y parcialmente coherentes de tipo Schell, cuya intensidad mútua es de la forma [MW95]

$$J(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = s(\boldsymbol{\rho}_1)s(\boldsymbol{\rho}_2)j(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) , \quad (6.A.7)$$

donde el grado de coherencia  $j$  es invariante bajo translaciones, es decir, sólo depende de la distancia entre los puntos  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$ . Para generar esta fuente, se utiliza un sistema óptico para realizar la transformada de Fourier (sistema  $2f$ ). En el plano de entrada,  $\Pi_i$ , del sistema se sitúa la fuente incoherente primaria cuya irradiancia es proporcional a  $I(\mathbf{u})$  y en el plano de salida,  $\Pi_o$ , se coloca un filtro en amplitud con función de transmisión igual a  $t(\boldsymbol{\rho})$ . La respuesta impulso de este sistema  $2f$  es

$$K(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}) = t(\boldsymbol{\rho}) \exp \left[ \frac{i2\pi}{\lambda f} \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u} \right] , \quad (6.A.8)$$

de manera que, usando

$$J(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \int I(\mathbf{u}) K^*(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}) K(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}) d^2u . \quad (6.A.9)$$

resulta

$$J(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \propto t(\boldsymbol{\rho}_1)t(\boldsymbol{\rho}_2)\tilde{I}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1}{\lambda f}\right) . \quad (6.A.10)$$

Es decir, cualquier fuente escalar del modelo de Schell (SM) se puede sintetizar utilizando un sistema óptico para realizar la transformada de Fourier, alimentado con una fuente incoherente con distribución de irradiancia proporcional a la transformada de Fourier del grado de coherencia de la fuente SM que se pretende sintetizar ( $I(\mathbf{u}) \propto \tilde{j}(\frac{\mathbf{u}}{\lambda f})$ ) y en cuyo plano de salida se sitúa un filtro en amplitud con función de transmitancia  $t(\boldsymbol{\rho}) \propto s(\boldsymbol{\rho})$ . En particular, si se desea generar una fuente de tipo Gauss-Schell, el filtro  $t(\boldsymbol{\rho})$  debe de ser gaussiano,

$$t(\boldsymbol{\rho}) = I_0 \exp \left( -\frac{\rho^2}{\sigma_i^2} \right) , \quad (6.A.11)$$

y la irradiancia de la fuente incoherente primaria tal que el grado de coherencia de la SM resultante también sea gaussiano,

$$j(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \exp \left( -\frac{(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2}{2\delta^2} \right) . \quad (6.A.12)$$

## Apéndice 6.B

En este apéndice se generaliza el teorema de van Cittert-Zernike al caso de fuentes espacialmente incoherentes y parcialmente polarizadas [GS00]. El teorema de van Cittert-Zernike se suele aplicar para sintetizar haces polarizados parcialmente coherentes a partir de fuentes primarias incoherentes.

En el tratamiento vectorial, los elementos de la matriz de coherencia-polarización (BCP) que caracteriza una fuente parcialmente polarizada y espacialmente incoherente son de la forma

$$\mathbf{J}_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, 0) \propto I_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_1) \delta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \quad (6.B.1)$$

donde  $\alpha, \beta = s, p$ , la función  $\delta$  es la delta de Dirac bidimensional y  $I_{\alpha\beta}$  es una función dependiente del punto que puede ser compleja si  $\alpha \neq \beta$  y cuyo módulo tiene unidades de intensidad.

Si  $K(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, z)$  representa al núcleo para la propagación libre desde el plano  $z = 0$  hasta el plano  $z = \text{constante} > 0$  [BW99], cada elemento de la matriz BCP se propaga de acuerdo con la fórmula

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \int \mathbf{J}_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, 0) K_{\alpha}^*(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{u}_1, z) K_{\beta}(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{u}_2, z) d^2u_1 d^2u_2. \quad (6.B.2)$$

Sustituyendo los elementos dados por la Ec. (6.B.1) en la Ec. (6.B.2) se puede calcular la matriz BCP del campo incoherente al propagarse.

Asumiendo que el eje  $z$  coincide con la dirección de propagación y que los núcleos para la propagación libre son idénticos para las dos componentes transversales del campo, es decir,  $K_{\alpha}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, z) = K_{\beta}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, z)$ , en aproximación paraxial vienen dados por

$$K(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, z) = \frac{-i \exp(ikz)}{\lambda z} \exp \left[ \frac{ik}{2z} (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{u})^2 \right], \quad (6.B.3)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$ . Cuando las Ecs. (6.B.1) y (6.B.3) se introducen en la Ec. (6.B.2) se obtiene

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \frac{\exp \left[ \frac{ik}{2z} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \right]}{z^2} \int I_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \exp \left[ \frac{-2\pi i}{\lambda z} \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) \right] d^2u. \quad (6.B.4)$$

que representa la generalización del teorema de van Cittert-Zernike para haces vectoriales parcialmente polarizados.

## Capítulo 7

# Síntesis de haces parcialmente coherentes y espiralmente polarizados utilizando un convertidor de polarización

### 7.1. Introducción

En este capítulo, se sintetiza experimentalmente un haz parcialmente coherente con distribución de polarización espiral en su sección transversal y se demuestra que dicha distribución de polarización permanece invariante en propagación libre. El método de síntesis que aquí se propone es diferente al que se propuso en el capítulo anterior y se basa en la superposición incoherente de modos espiralmente polarizados. Para probar la invariancia de la polarización, se caracteriza el haz en distintos planos transversales correspondientes a diferentes distancias de propagación. La caracterización se lleva a cabo estudiando el estado de polarización en cada punto de la sección transversal del haz y analizando el valor de diversos parámetros globales que informan sobre los porcentajes de polarización radial, azimutal y circular contenidos en el haz [MM06, MM08a].

## 7.2. Haces parcialmente coherentes con distribución de polarización espiral invariante en propagación

Se sabe que, en general, un haz no-uniformemente polarizado cambia su distribución de polarización en propagación, incluso si el haz es determinístico, totalmente polarizado y se estudia en aproximación paraxial. Esto ocurre porque, en general, las dos componentes transversales del campo eléctrico cambian de forma diferente al propagarse de manera que, la distribución de polarización del campo propagado difiere de la distribución inicial. Sin embargo, para determinadas aplicaciones puede requerirse que la distribución de polarización no cambie en propagación. Por esta razón en los últimos años se ha prestado mucha atención por un lado, al estudio de los cambios que ocurren cuando un haz parcialmente y/o no-uniformemente polarizado se propaga libremente o a través de un sistema óptico [JA94, AW00, GS00, GO01, GS01, TE03, KW05, SH05, MM07, WO07b, DZ08, GO08, ZW08, MM09, ZH09]), y por otro lado, a la obtención de las condiciones que un haz parcialmente coherente y parcialmente polarizado con distribución de polarización no-uniforme debe satisfacer para que sus características de polarización sean invariantes en propagación libre [TE03, WO07b, DZ08, GO08, ZW08]. En particular, Tervo obtuvo las condiciones bajo las cuales una fuente electromagnética parcialmente coherente da lugar a un haz azimutalmente polarizado en cualquier plano transversal a la dirección de propagación [TE03]. Las condiciones anteriores fueron generalizadas por Gori al caso de haces parcialmente coherentes con distribución de polarización espiral [GO08]. En esta sección se derivan dichas *condiciones de invariancia de la polarización*.

Sea un haz electromagnético cuasi-monocromático y parcialmente coherente. En aproximación paraxial, dicho haz se puede describir a través de su matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}$ , que en el plano  $z = 0$  (plano de la fuente) se escribe (ver la Sec. 5.2.1)

$$\widehat{W}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, 0) = \begin{pmatrix} \langle E_s^*(\boldsymbol{\rho}_1, 0) E_s(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \rangle & \langle E_s^*(\boldsymbol{\rho}_1, 0) E_p(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \rangle \\ \langle E_p^*(\boldsymbol{\rho}_1, 0) E_s(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \rangle & \langle E_p^*(\boldsymbol{\rho}_1, 0) E_p(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \rangle \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

donde  $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi)$  es el vector de posición de un punto de la sección transversal del haz.

Se ha demostrado que la expresión de la matriz  $\widehat{W}$  asociada a un haz azimutalmente polarizado que mantiene su distribución de polarización en propagación debe ser de la forma [TE03]

$$\widehat{W}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, 0) = W^s(\rho_1, \rho_2, 0) \widehat{P}(\varphi_1, \varphi_2) , \quad (7.2)$$

siendo  $W^s(\rho_1, \rho_2, 0)$  una función escalar de densidad espectral mútua que depende exclusivamente de las coordenadas radiales,  $\rho_1$  and  $\rho_2$ , y  $\widehat{P}(\varphi_1, \varphi_2)$  una matriz dada por

$$\widehat{P}(\varphi_1, \varphi_2) = \boldsymbol{\Phi}^*(\varphi_1) \boldsymbol{\Phi}^t(\varphi_2) , \quad (7.3)$$

donde  $\boldsymbol{\Phi}(\varphi)$  es un vector de Jones que describe un campo azimutalmente polarizado,

$$\boldsymbol{\Phi}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} , \quad (7.4)$$

el “\*” denota el complejo conjugado y la “t” representa el vector de Jones traspuesto. La Eq. (7.2) constituye una condición necesaria y suficiente para asegurar la invariancia de la distribución de polarización en el caso de los haces azimutalmente polarizados [TE03]. Dicha condición establece que si todos los puntos pertenecientes a la circunferencia  $\rho = \text{constante}$  de la sección transversal de un campo parcialmente coherente y azimutalmente polarizado están perfectamente correlacionados entre sí, entonces la distribución de polarización de dicho campo será invariante en propagación libre.

La condición (7.2) se ha generalizado recientemente para haces espiralmente polarizados [GO08]. En tal caso, para que la distribución de polarización espiral no cambie cuando el haz se propaga libremente, la matriz  $\widehat{P}$  que aparece en la expresión (7.2) debe ser de la forma

$$\widehat{P}(\varphi_1 + \alpha, \varphi_2 + \alpha) = \boldsymbol{\Phi}^*(\varphi_1 + \alpha) \boldsymbol{\Phi}^t(\varphi_2 + \alpha), \quad (7.5)$$

siendo  $\alpha$  el parámetro de crecimiento de las espirales de polarización. En la Fig. 3.1 del Cap. 3 se esquematiza la distribución de polarización que describe el vector de Jones  $\boldsymbol{\Phi}(\varphi + \alpha)$ .

Por tanto, la *condición de invariancia de la polarización* generalizada al caso de los haces espiralmente polarizados se escribe

$$\widehat{W}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, 0) = W^s(\rho_1, \rho_2, 0) \widehat{P}(\varphi_1 + \alpha, \varphi_2 + \alpha) . \quad (7.6)$$

Este resultado concuerda con lo que se dijo en el capítulo 3 donde se estudiaron los haces espiralmente polarizados en el caso completamente coherente, es decir, que si un haz viene dado por el vector de Jones

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi) = f(\rho) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi + \alpha) \\ \cos(\varphi + \alpha) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

la distribución de polarización se conserva en propagación libre, ya que la matriz  $\widehat{W}$  para este haz es

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, 0) &= f^*(\rho_1) f(\rho_2) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sin(\varphi_1 + \alpha) \sin(\varphi_2 + \alpha) & -\sin(\varphi_1 + \alpha) \cos(\varphi_2 + \alpha) \\ -\cos(\varphi_1 + \alpha) \sin(\varphi_2 + \alpha) & \cos(\varphi_1 + \alpha) \cos(\varphi_2 + \alpha) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

que tiene la estructura de la Ec. (7.6).

Para demostrar que la Ec. (7.6) representa un haz con polarización invariante, se puede calcular la matriz de densidad espectral mútua que describe el haz tras propagarse en el espacio libre una cierta distancia  $z$  en régimen paraxial. Usando la integral de Fresnel, resulta

$$\widehat{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = W^s(r_1, r_2, z) \widehat{P}(\phi_1 + \alpha, \phi_2 + \alpha), \quad (7.9)$$

con

$$\begin{aligned} W^s(r_1, r_2, z) &= \left(\frac{k}{z}\right)^2 \exp\left[i \frac{k}{2z}(r_1^2 - r_2^2)\right] \\ &\times \iint W^s(\rho_1, \rho_2, 0) \exp\left[i \frac{k}{2z}(\rho_1^2 - \rho_2^2)\right] J_1\left(\frac{k}{z} r_1 \rho_1\right) J_1\left(\frac{k}{z} r_2 \rho_2\right) \rho_1 \rho_2 d\rho_1 d\rho_2, \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde  $k$  es el número de onda,  $J_1$  la función de Bessel de primera especie de orden 1 [AS72], y las integrales se extienden a toda la región del plano transversal  $z = 0$  que ocupa la fuente. De la Ec. (7.9) se desprende que, independientemente del valor de  $\alpha$ , la distribución de polarización del haz es invariante en propagación libre.

### 7.3. Procedimiento de síntesis

En la sección anterior se ha estudiado cómo debe ser la estructura matemática de la matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}$ , que describe un campo espiralmente polarizado para que su distribución de polarización no cambie en propagación libre. En esta sección, por un lado, se propone un método que permite construir matrices  $\widehat{W}$  con dicha estructura (Ec. (7.6)), que asegura la invariancia de la polarización. Y por otro lado, se aplicará el método propuesto para sintetizar una fuente anular parcialmente coherente y espiralmente polarizada.

De acuerdo con la Ec. (7.6), la parte escalar de la matriz de densidad espectral mútua,  $W^s$ , asociada a un haz cuya distribución de polarización espiral se mantiene invariante en propagación libre, debe ser únicamente función de las coordenadas radiales  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Esto significa que todos los puntos situados sobre la circunferencia  $\rho = \text{constante}$  deben estar correlacionados entre sí. Por esta razón, para sintetizar este tipo de haces parcialmente coherentes para los que las correlaciones no dependen de  $\rho_1 - \rho_2$  no se puede aplicar el teorema de Van Cittert-Zernike [GS00] sino que es necesario recurrir, por ejemplo, al procedimiento de síntesis que se describe a continuación.

La síntesis de una fuente parcialmente coherente y espiralmente polarizada se puede llevar a cabo superponiendo  $N$  campos completamente coherentes pero no correlacionados entre sí, todos ellos con simetría rotacional y distribución de polarización espiral. Tales campos se escriben

$$\mathbf{U}_n(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{\lambda_n} f_n(\rho) \boldsymbol{\Phi}(\varphi + \alpha) , \quad (7.11)$$

donde  $n = 1, \dots, N$ , las funciones  $f_n(\rho)$  están normalizadas y el coeficiente  $\lambda_n$  da idea de la potencia asociada al  $n$ -ésimo campo. Además, como el vector polarización,  $\boldsymbol{\Phi}(\varphi + \alpha)$ , no está bien definido en  $\rho = 0$ , las funciones  $f_n(\rho)$  deben elegirse de manera que se verifique la condición  $f_n(0) = 0$ .

Como no existe correlación entre los campos  $\mathbf{U}_n$ , la matriz de densidad espectral mútua,  $\widehat{W}$ , que se obtiene al superponerlos tiene la misma estructura que la  $\widehat{W}$  de la Ec. (7.6), con

$$W^s(\rho_1, \rho_2, 0) = \sum \lambda_n f_n(\rho_1) f_n^*(\rho_2) . \quad (7.12)$$



Cuando los campos  $f_n(\rho)$  coinciden con los modos de  $W^s$  y los coeficientes  $\lambda_n$  con los autovalores de dicha función, se dice que la ecuación anterior es una expansión de Mercer [MH79, WO82]. Por tanto, cualquier función de densidad espectral mútua escalar que dependa exclusivamente de las coordenadas radiales  $\rho_1$  y  $\rho_2$  se puede sintetizar superponiendo incoherentemente  $N$  campos. Por último, es necesario dotar al campo con una distribución de polarización espiral para obtener un haz parcialmente coherente y espiralmente polarizado.

Para demostrar que el esquema de síntesis anterior es válido y realizable experimentalmente se ha generado un haz parcialmente coherente superponiendo dos campos espiralmente polarizados con amplitudes rotacionalmente simétricas. Los campos se han construido de forma que no hay correlación entre ellos. A continuación se describe el dispositivo experimental (véase la Fig. 7.1) que se ha utilizado para sintetizar una fuente con distribución de irradiancia anular y uniforme, parcialmente coherente y con distribución de polarización espiral.

En primer lugar, dos haces linealmente polarizados según el eje vertical que proceden de láseres de He-Ne diferentes, se expanden, se filtran espacialmente y se coliman a través de un sistema óptico formado por un objetivo de microscopio y una lente convergente (representados, respectivamente, como  $O_i$  y  $L_i$  con  $i = 1, 2$  en la Fig. 7.1). Seguidamente, dichos haces se propagan a través de dos aperturas anulares,  $T_i$  con  $i = 1, 2$ , distintas (Fig. 7.2), de modo que las amplitudes de los campos a la salida de las mismas vienen dados por las siguientes expresiones analíticas

$$f_i(\rho) = A_i[\text{circ}(\rho/B_i) - \text{circ}(\rho/C_i)] ; \quad (i = 1, 2) , \quad (7.13)$$

donde las funciones  $\text{circ}(\rho/a)$  representan aperturas circulares de radio  $a$ . En particular, los valores de los parámetros que caracterizan las transmitancias anulares son  $A_1 = A_2$ ,  $B_1 = 2.35$  mm,  $C_1 = 1.50$  mm y  $B_2 = 3.20$  mm,  $C_2 = 2.46$  mm. A la salida de las transmitancias se tienen dos campos linealmente polarizados cuya distribución de irradiancia es anular y uniforme.

Los campos anteriores inciden desde direcciones perpendiculares sobre un divisor de haz ( $BS$ ) donde se superponen. Mediante un sistema óptico formado por dos lentes convergentes  $L_A$  y  $L_B$  cuyo factor de aumento es  $M = -0.30$  se forman las imágenes de los campos obtenidos a la salida de las aperturas  $T_1$  y  $T_2$  en el

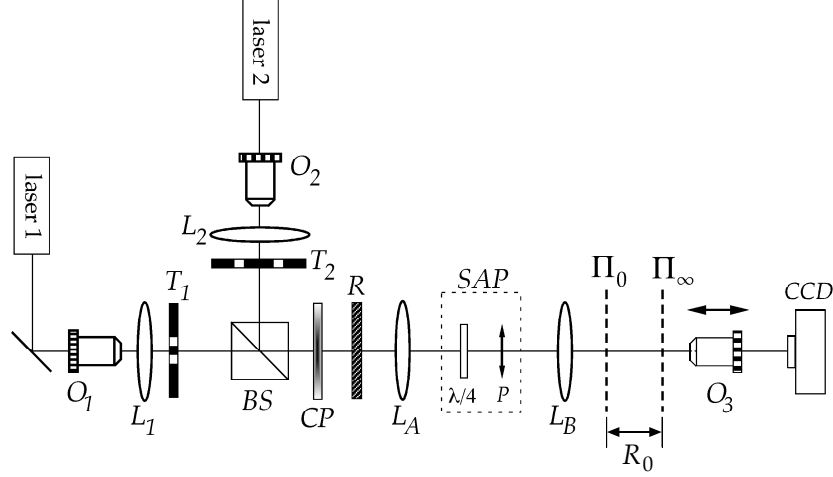


Figura 7.1: Sistema experimental para la síntesis de campos parcialmente coherentes con distribución de polarización espiral invariante en propagación libre. En la figura  $O_i$  con  $i = 1 - 3$  son objetivos de microscopio;  $L_1, L_2, L_A$  y  $L_B$  son lentes convergentes;  $T_i$  con  $i = 1, 2$  son transmitancias anulares;  $BS$  representa un divisor de haz;  $CP$  y  $R$  se refieren, respectivamente, al convertidor de polarización y al rotador utilizados en el experimento; y por último,  $SAP$  es el sistema de análisis de la polarización.

plano  $\Pi_0$  que representa el plano de la fuente ( $z = 0$ ). En el plano  $z = 0$ , si dos puntos del campo pertenecen al mismo anillo están perfectamente correlacionados el uno con el otro, mientras que si pertenecen a anillos distintos no existe correlación entre ellos. En particular, la correlación entre puntos situados sobre una circunferencia ( $\rho = \text{constante}$ ) es total.

Aunque en el experimento se ha trabajado con dos campos espacialmente ortogonales no-correlados entre sí, es decir, se han superpuesto los modos de la fuente que se pretende generar, no es necesario elegir los campos de esa forma para que el procedimiento de síntesis sea válido. En general, los campos que se superponen podrían estar correlados (parcialmente o totalmente) entre sí y ser no-ortogonales.

Con esto finaliza la fase del proceso de síntesis en la que la fuente adquiere las características relacionadas con la coherencia. A continuación, se explica la

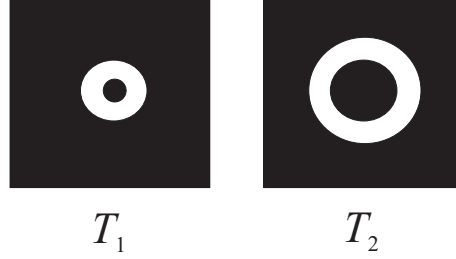


Figura 7.2: Esquema de las transmitancias utilizadas en el experimento.

segunda etapa del procedimiento donde se manipula el estado de polarización del haz.

Para dotar a la fuente con una distribución de polarización de tipo espiral se procede como en el capítulo 3. Se utiliza en primer lugar un convertidor de polarización ( $CP$ ), que rota punto a punto el estado de polarización del haz incidente (uniformemente y linealmente polarizado respecto del eje vertical) [SS96]. La matriz de Jones que describe la acción del convertidor de polarización se escribe

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

Por tanto, a la salida del  $CP$  se obtiene un campo azimutalmente polarizado. Después del  $CP$  se situá un rotador de la polarización ( $R$ ) que consiste en dos láminas de fase de media onda cuyos ejes rápidos se orientan formando un ángulo igual a  $\gamma$  (ver Fig. 7.3) [ZL02].

La matriz de Jones del rotador es [ZL02]

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & -\sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & \cos 2\gamma \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

y representa una rotación local de  $2\gamma$  radianes sobre el estado de polarización del haz incidente. Concluyendo, a la salida del sistema óptico propuesto, es decir, en el plano  $\Pi_0$ , se obtiene una fuente anular parcialmente coherente, totalmente y espiralmente polarizada con  $\alpha = 2\gamma$ . En particular, para este experimento el ángulo entre los ejes rápidos de las láminas del rotador se ha elegido de forma que  $\alpha = -35^\circ$ .

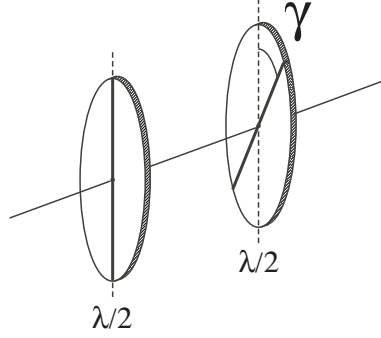


Figura 7.3: Rotador de la polarización: consiste en dos láminas de fase de media onda,  $\lambda/2$ , cuyos ejes rápidos forman entre sí un ángulo  $\gamma$ .

El plano posterior,  $\Pi_\infty$ , del sistema óptico formado por las lentes  $L_A$  y  $L_B$  se sitúa a una distancia  $R_0 = 240$  mm del plano  $\Pi_0$  (ver Fig. 7.1). Esto significa que los dos campos cuya imagen se recoge en el plano  $\Pi_0$  poseen un factor de curvatura negativo de la forma  $\exp[-ik\rho^2/2R_0]$ . Así, todas las distancias de propagación que se podrían considerar en caso de que dicho factor de curvatura no existiese (es decir, entre cero e infinito) quedan representadas en el intervalo finito determinado por los planos  $\Pi_0$  y  $\Pi_\infty$ . Por otra parte, nótese que la presencia de este factor de curvatura no afecta a las características de polarización del haz propagado.

Para relacionar la distancia de propagación real (entre cero e infinito) con la distancias medidas sobre el banco óptico se puede utilizar el número de Fresnel generalizado,  $N_F$  [CP73], que se define a través de la expresión

$$N_F = \frac{(MB_2)^2}{\lambda} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{R_0} \right), \quad (7.16)$$

donde  $M$  es el aumento del sistema de lentes  $L_A - L_B$ ,  $B_2$  el radio exterior de la segunda transmitancia,  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación emitida por los láseres y  $R_0$  la distancia entre los planos  $\Pi_0$  y  $\Pi_\infty$ . En particular, cuando  $z = R_0$  se tiene  $N_F = 0$ , esto significa que  $\Pi_\infty$  es el plano donde puede observarse el campo emitido por la fuente en condiciones de campo lejano. Desplazando el plano de observación hacia la fuente el valor de  $N_F$  aumenta hasta infinito, valor que se corresponde con el plano  $z = 0$ . Además, este parámetro proporciona información sobre el tamaño del perfil de irradiancia del haz.

Los perfiles de irradiancia propagados se miden usando un objetivo de microscopio  $O_3$  que forma la imagen de estos sobre el plano donde se encuentra el sensor de la cámara CCD (Pulnix TM-765). Como el objetivo  $O_3$  se puede desplazar a lo largo del eje óptico, es posible tomar imágenes correspondientes a varias distancias de propagación. Además, para medir los parámetros de Stokes locales en la sección transversal del haz se utiliza un sistema analizador de la polarización ( $SAP$ ) formado por una lámina de fase de cuarto de onda ( $\lambda/4$ ) y un polarizador ( $P$ ).

En la siguiente sección se explica cómo se ha realizado la caracterización del haz parcialmente coherente y espiralmente polarizado sintetizado mediante el procedimiento que se acaba de describir.

## 7.4. Caracterización del haz

La caracterización del haz se ha realizado tanto desde el punto de vista local, analizando los perfiles de irradiancia y las distribuciones de polarización en diversos planos correspondientes a distintas distancias de propagación, como desde el punto de vista global, estudiando diversos parámetros globales que proporcionan información sobre los contenidos radial, azimutal y circular de polarización en la sección transversal del haz. Con los resultados derivados de esta caracterización se ha comprobado que efectivamente la distribución de polarización espiral se conserva en propagación, es decir, se ha demostrado que las características del haz relativas a la polarización son invariantes.

### 7.4.1. Caracterización local

En primer lugar, para caracterizar punto a punto el haz se han determinado, en cuatro planos transversales diferentes, los perfiles de irradiancia y las distribuciones de polarización experimentales y se han comparado con los teóricos calculados mediante simulaciones numéricas. Los cuatro planos que se han considerado son :  $z = 0$  (es decir, el plano de la fuente) (a), dos planos intermedios que se corresponden, respectivamente, con las distancias de propagación  $z_1 = 86$  mm ( $N_F \simeq 11$ )(b) y  $z_2 = 106$  mm ( $N_F \simeq 7,7$ )(c), y el plano donde se observa el haz en condiciones de campo lejano  $z_3 = R_0 = 240$  mm ( $N_F = 0$ )(d).

Para obtener las distribuciones de irradiancia y de polarización experimentales del haz en su sección transversal, se han medido los parámetros de Stokes locales,  $s_i(r, \theta)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), en cada uno de los cuatro planos que se han considerado. Para determinar dichos parámetros se recurre al procedimiento habitual (ver Sec. 2.2.3), es decir, con la cámara CCD se capturan las irradiancias  $I(r, \theta)$  correspondientes a las 6 configuraciones típicas del sistema de análisis de la polarización, esto es, polarizador con eje de transmisión a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  (con y sin lámina),  $90^\circ$  y por último,  $135^\circ$  (de nuevo, con y sin lámina).

Los perfiles de irradiancia junto con el estado de polarización en diversos puntos de la sección transversal del haz se muestran en la Fig. 7.4 y confirman que, al menos en el marco de la aproximación paraxial, la distribución de polarización espiral permanece invariante cuando el haz se propaga libremente. Por otra parte, para comparar los resultados experimentales anteriores con los teóricos se han representado estos últimos en la Fig. 7.5. Las mínimas diferencias que se aprecian entre los patrones de polarización experimentales y los teóricos podrían deberse bien a pequeñas imperfecciones en el diseño del convertidor de polarización ( $CP$ ) o bien a no-uniformidades en la irradiancia del haz de entrada que no fueron eliminadas en el proceso de filtrado y colimación del mismo.

Observando los patrones de polarización representados en la Fig. 7.4 puede verse que el haz sintetizado presenta una distribución de polarización de tipo espiral pero ligeramente irregular. Por ejemplo, en el perfil transversal del haz existen ciertos puntos donde el estado de polarización no es lineal como cabría esperar sino que es elíptico o donde el valor del azimut es ligeramente diferente respecto del que predice la teoría. Por esta razón, es interesante evaluar la calidad o la uniformidad de la distribución de polarización generada. Para ello se ha recurrido a diversos parámetros globales del haz que fueron introducidos en el capítulo 2.

#### 7.4.2. Caracterización global

Desde el punto de vista global, un haz no-uniformemente polarizado se puede caracterizar a través de parámetros globales. Para describir los haces espiralmente polarizados que se han generado utilizando el método descrito en la Sec. 7.3, son adecuados los parámetros globales que se definieron en el capítulo 2 en las

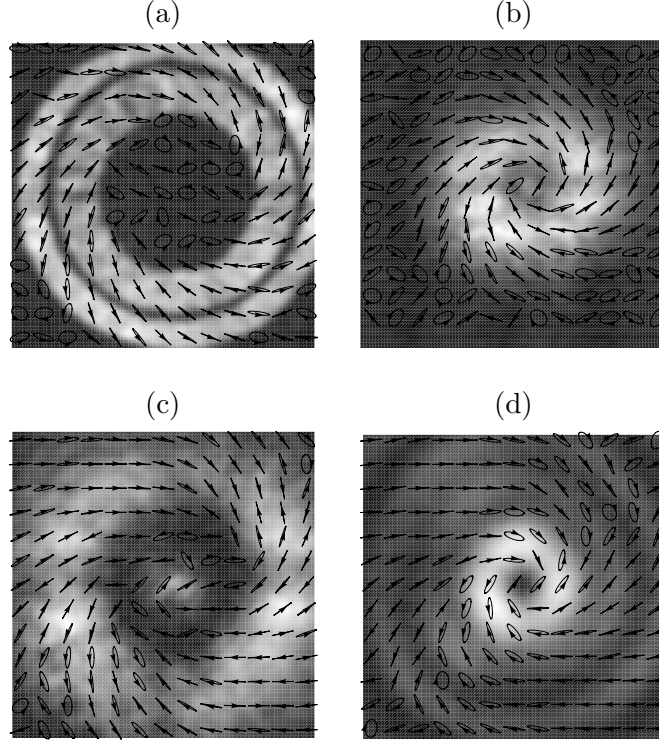


Figura 7.4: Irradiancias y patrones de polarización experimentales en el plano de la fuente ( $z = 0$ ) (a), en los planos intermedios  $z_1 = 86$  mm ( $N_F \simeq 11$ )(b) y  $z_2 = 106$  mm ( $N_F \simeq 7,7$ )(c) y por último, en el campo lejano (d).

secciones 2.3.2 y 2.3.3 y que proporcionan el porcentaje de polarización radial, azimutal y circular en la sección transversal del haz ( $\tilde{\rho}_R$ ,  $\tilde{\rho}_A$  y  $\tilde{\rho}_c$ , respectivamente). Estos parámetros ya se usaron en el capítulo 3 para caracterizar haces completamente coherentes y espiralmente polarizados. En esta sección se pone en evidencia su utilidad en la caracterización de haces parcialmente coherentes y no-uniformemente polarizados.

Para cualquier campo expresable mediante la Ec. (7.9), los parámetros  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  son independientes de la amplitud del campo y resultan

$$\tilde{\rho}_R = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha), \quad (7.17)$$

$$\tilde{\rho}_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha). \quad (7.18)$$

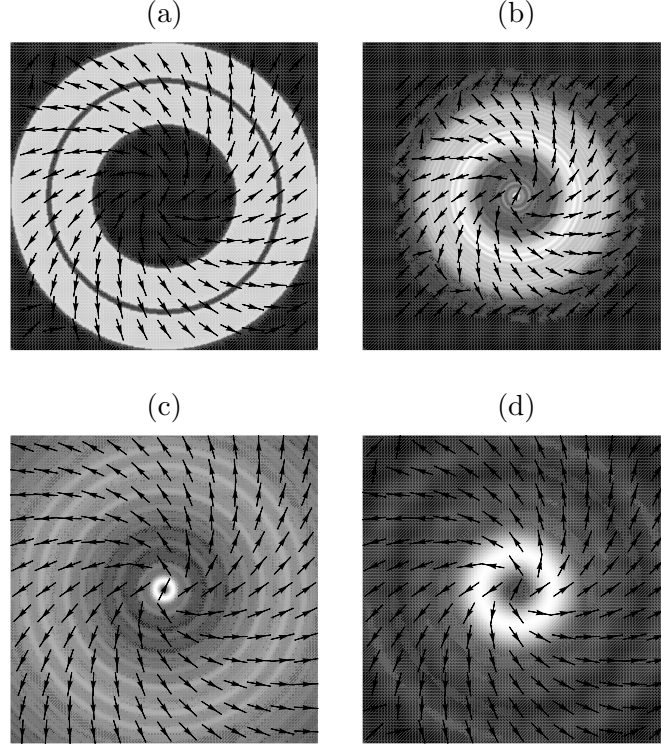


Figura 7.5: Irradiancias y patrones de polarización teóricos en el plano de la fuente ( $z = 0$ ) (a), en los planos intermedios  $z_1 = 86$  mm ( $N_F \simeq 11$ )(b) y  $z_2 = 106$  mm ( $N_F \simeq 7,7$ )(c) y por último, en el campo lejano (d).

Además, como los haces espiralmente polarizados son una clase particular de haces con estado de polarización no-uniforme pero lineal en todos los puntos de la sección transversal, se espera que el contenido de polarización circular en el haz sea nulo, es decir,  $\tilde{\rho}_c = 0$ .

Por un lado, se ha comprobado que los valores de  $\tilde{\rho}_R$ ,  $\tilde{\rho}_A$  y  $\tilde{\rho}_c$  calculados a partir de los datos experimentales coinciden con los teóricos, calculados mediante las expresiones (7.17) y (7.18) con  $\alpha = -35^\circ$ . Por otro lado, se ha comprobado (dentro de los márgenes de error impuestos por el experimento) que dichos valores no cambian cuando el haz se propaga libremente, es decir, se ha chequeado la invariancia de los mismos. Para ello se han determinado en los cuatro planos transversales que se consideraron en la sección anterior: el plano de la fuente



( $z = 0$ ), los dos planos intermedios ( $z_1 = 86$  mm y  $z_2 = 106$  mm) y el plano que representa el campo lejano ( $z = 240$  mm) y se ha demostrado que su valor es constante.

Los valores obtenidos, tanto experimentales como teóricos, se muestran en la tabla 7.1. Observando los resultados recogidos en esta tabla, se puede decir que, al menos en los planos en los que se ha realizado el estudio,  $\tilde{\rho}_R$  y  $\tilde{\rho}_A$  son invariantes. De ahí se deduce que en el caso de haces parcialmente coherentes y espiralmente polarizados dados por la Ec. (7.6) los contenidos radial y azimutal de la polarización no cambian (apreciablemente) en propagación. Además, de los valores experimentales de  $\tilde{\rho}_c$  se desprende que en ninguno de los planos transversales el contenido circular de la polarización excede el 3 %.

Tabla 7.1: Valores experimentales y teóricos de los parámetros  $\tilde{\rho}_R$ ,  $\tilde{\rho}_A$  y  $\tilde{\rho}_c$  en cuatro planos transversales diferentes.

Plano	$\tilde{\rho}_R$	$\tilde{\rho}_A$	$\tilde{\rho}_c$
$z = 0$	0,33	0,67	-0,03
$z = z_1$	0,33	0,67	-0,03
$z = z_2$	0,36	0,64	0,02
$z = R_0$	0,36	0,64	-0,02
Valores teóricos	0,33	0,67	0

## Capítulo 8

# Conclusiones

A partir de los resultados expuestos en esta memoria y en relación con los objetivos de esta tesis, se pueden extraer las siguientes conclusiones generales:

- Se han propuesto diversos métodos para sintetizar haces vectoriales completamente coherentes y totalmente y no-uniformemente polarizados (TNUP), en particular, haces linealmente y no-uniformemente polarizados. Además, se han diseñado y puesto a punto sistemas ópticos para generarlos experimentalmente.
- Se ha afrontado el problema de la síntesis de campos parcialmente coherentes y no-uniformemente polarizados. Por un lado, se ha utilizado la regla de superposición generalizada para sintetizar haces electromagnéticos del modelo de Schell y por otro lado, recurriendo al desarrollo en modos coherentes de la matriz de densidad espectral mútua, se ha generado un campo parcialmente coherente y espiralmente polarizado.
- Se han introducido diversos parámetros globales nuevos útiles para caracterizar en la sección transversal la polarización de los haces o campos electromagnéticos que se han sintetizado. Además, se ha propuesto un procedimiento para determinarlos experimentalmente. En lo relativo a la caracterización de la estructura espacial, se ha analizado cómo varían los parámetros de calidad y de curtosis de diferentes tipos de haces TNUP.

De manera más específica se pueden destacar los siguientes resultados:

- Se han sintetizado haces espiralmente polarizados utilizando polarizadores no convencionales, en particular, un polarizador azimutal o “axis finder” y un convertidor de la polarización de cristal líquido, seguidos de un rotador de la polarización. El sistema experimental diseñado para este fin permite obtener toda la gama de haces espiralmente polarizados. Se ha comprobado el buen acuerdo existente entre teoría y experimento caracterizando la distribución de polarización de los mismos.
- Los haces espiralmente polarizados pertenecen a una clase más general de haces linealmente y no-uniformemente polarizados que se obtienen superponiendo haces cuyo estado de polarización viene dado por los vectores de la base de polarización de Gori. Estos haces a su vez se pueden escribir como combinación de haces que presentan vórtices. Se han obtenido expresiones analíticas para el parámetro de calidad y se ha observado que la calidad de estos haces puede mejorar cuando se superponen dos haces con cargas topológicas distintas respecto del caso con un único vórtice simple. Se ha demostrado que los haces espiral, radial o azimutalmente polarizados tienen el mismo valor de  $Q$ .
- Se ha propuesto un método para generar haces TNUP mediante sistemas interferométricos de tipo Mach-Zehnder y transmitancias en amplitud. Modificando adecuadamente los parámetros de las transmitancias cambian tanto la distribución de polarización como las características espaciales del haz. En concreto, se ha sintetizado experimentalmente un haz de este tipo utilizando una transmitancia supergaussiana.
- Partiendo de los haces TNUP generados anteriormente, se ha propuesto un procedimiento para realizar conformado espacial que permite modificar simultáneamente el perfil de irradiancia, la capacidad de enfoque y el grado de aplanamiento del haz. Se han obtenido expresiones analíticas de los parámetros de calidad y de curtosis y girando un polarizador colocado a la

salida del sistema anterior es posible obtener haces platicúrticos, mesocúrticos y leptocúrticos, así como minimizar el valor del parámetro de calidad del haz.

- Se ha obtenido la regla de superposición generalizada (RSG) que permite construir matrices de densidad espectral mútua que representarán siempre fuentes electromagnéticas parcialmente coherentes físicamente realizables. Se han encontrado las funciones peso y los núcleos que aparecen en la RSG y a través de los cuales se puede construir la matriz de densidad espectral mútua que modeliza una fuente electromagnética anisótropa de tipo Schell. Particularizando al caso isótropo, se han obtenido fuentes electromagnéticas del modelo de Gauss-Schell, fuentes electromagnéticas con correlaciones cruzadas de tipo especular o de tipo “Twisted-Schell”.
- Se ha propuesto un dispositivo experimental que permite sintetizar cualquier fuente electromagnética del modelo de Schell. El procedimiento de síntesis se basa en la aplicación de la regla de superposición generalizada y consta de dos etapas. En la primera etapa, utilizando un interferómetro de Mach-Zehnder, se genera una fuente primaria incoherente no-uniformemente polarizada y en la segunda, aplicando el teorema de van Cittert-Zernike la fuente adquiere las propiedades de coherencia deseadas. Se han encontrado las transmitancias que se deben colocar en el interferómetro para obtener fuentes electromagnéticas de tipo Gauss-Schell generales, con correlaciones cruzadas nulas o con grado de polarización en campo lejano gaussiano.
- Se ha utilizado un método de síntesis alternativo basado en la superposición incoherente de modos para producir haces parcialmente coherentes y no-uniformemente polarizados que no se pueden generar con el procedimiento anterior. Mediante este procedimiento se ha sintetizado experimentalmente un haz parcialmente coherente y espiralmente polarizado y se ha comprobado que la distribución de polarización de este haz se conserva en propagación libre.
- Se han introducido unos parámetros globales nuevos que permiten determinar el porcentaje de luz radialmente o azimutalmente polarizada contenida

en la sección transversal del haz, así como la uniformidad de dichos contenidos. Se ha comprobado experimentalmente que estos parámetros son especialmente útiles para describir los haces completamente o parcialmente coherentes con distribuciones de polarización de tipo espiral que se han sintetizado en esta tesis.

# Thesis summary and conclusions

## Thesis Summary

### Introduction

Most of the usual lasers emit radiation which is uniformly polarized, that is, the state of polarization is the same in all points of the transverse section of the beam. However, non-uniformly polarized (NUP) beams have attracted the interest of the community of physicists in recent years. For example, it has been shown that radially or azimuthally polarized beams, that belong to the general class of vectorial beams with cylindrical symmetry in the polarization characteristics (axial or rotational symmetry as well), are useful to develop applications in fields such as high-resolution microscopy, material processing, optical trapping, particles acceleration, etc. Therefore, many researches have been focused on the study and the experimental synthesis of beams with axially symmetric distribution of polarization.

On the other hand, not only it is important proposing and designing optical systems aimed at synthesizing beams with assigned polarization properties, but also defining and providing tools for their characterization. To the latter aim, local or global parameters can be used. In the first case, the state of polarization is studied at each point of the transverse section of the beam; in the second one, parameters that refer to average properties of the whole transverse profile are used. Parameters for beam characterization should be defined on requiring that they can be (analytically or numerically) evaluated and can be measured as well.

Moreover, it would be desirable that they were valid for arbitrary beams.

Main aim of the present work is twofold: on the one hand, to propose different procedures for synthesizing beams and/or fields with non-uniform distribution of polarization at a given plane; on the other hand, to characterize the synthesized fields. All the work developed in this thesis has been carried out considering the paraxial approximation and neglecting the longitudinal component of the field.

In what follows, a brief abstract of each chapter of the thesis is included. Quotations refer to the list of papers published during the thesis period and are reported at the end of the present summary.

## **Chapter 2: Parameters for characterizing non-uniformly polarized beams**

Beam characterization has been carried out both from the local and from the global point of view. In this chapter, the formalism and the parameters used for characterizing the polarization of NUP beams that will be studied in the next chapters are introduced.

Regarding the characterization of the local state of polarization of a beam, the local polarization matrix and the Stokes parameters have been used. From the latter parameters, in particular, the local degree of polarization, the local azimuth and the ellipticity at each point of the beam transverse section can be defined. On the other hand, global parameters, recently proposed for describing non-uniformly distributions of polarization and the optical devices that has been designed for measuring them, are defined in this chapter. The latter give, in particular, the circular, radial and azimuthal polarization contents across a beam transverse profile and the weighted degree of polarization. All of them can be expressed and measured in terms of the local Stokes parameters. Furthermore, some useful parameters to describe the spatial structure of NUP beams are reviewed, such as the beam quality and the kurtosis parameters, which are defined in terms of the intensity moments of the beam. New results concerning the arguments treated in this chapter have been published in *Opt. Commun.*, **281**, 1976-1980 (2008).

### Chapter 3: Synthesis of non-uniformly and totally polarized beams by means of non-conventional polarizers

The synthesis of NUP optical beams is a topic of growing interest in Optics, both from theoretical and from applicative viewpoints, and several methods have been proposed in the literature to synthesize them. Most of these methods are aimed at generating radially or azimuthally polarized beams. Just to quote some, we recall techniques using interferometric arrangements, sectorized spatially varying retarders, space-variant wave plates based on stress birefringence, and polarization converters based on liquid-crystal devices.

In this chapter, a class of linearly and non-uniformly polarized fields, the so-called spirally polarized beams (SPB), which include radially and azimuthally polarized beams as particular cases, are synthesized by means of two different techniques. In the first case, starting from a conventional laser beam with uniform linear polarization, an azimuthally polarized beam has been produced by using an azimuthal polarizer (also known as axis finder). The spiral-like polarization pattern has been eventually obtained by means of a polarization rotator. In the second technique, the azimuthal polarizer has been replaced by a liquid-crystal-based polarization converter. Details of the experimental setup and results can be found in Ref. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **11**, 085708 (2009).

It has been also shown that spirally polarized beams belong to a wider class of non-uniformly totally polarized (NUTP) beams, i.e., the ones that are obtained when two beams with state of polarization described in terms of the Gori's polarization basis are combined or, in an equivalent way, when two optical vortex beams are superimposed. The beam quality parameter of this class of NUTP beams has also been investigated in Chapter 3, as well as the conditions to optimize the value of this parameter (see *J. Opt. A: Pure and Appl Opt.*, **10**, 125004 (1-6) (2008)).



## **Chapter 4: Synthesis of non-uniformly and totally polarized beams by means Mach-Zehnder interferometric systems and amplitude transmittances**

In Chapter 4 a versatile procedure, based on an interferometric system to generate NUTP beams, is proposed. This kind of devices was already been used for modifying the spatial characteristics and the state of polarization of beams by inserting phase plates and general ABCD optical systems in the interferometer arms. In the presented procedure, a Mach-Zehnder interferometer with amplitude transmittances placed in its arms is used to synthesize linearly and non-uniformly polarized beams. In particular, when super-gaussian transmittances are used, a huge variety of NUTP beams can be generated by changing the transmittances parameters or the transmission functions (see details in *Proc. ICO Topical Meeting on Optoinformatics/Information Photonics*, St. Petersburg, Russia, September 4-7 (2006) ISBN 5-7921-0719-6 pp. 224-226.)

Furthermore, it is possible to perform beam shaping by rotating a linear polarizer placed at the output of the previous interferometer. Beam shaping techniques have been developed in order to obtain laser beams with specific distributions of irradiance which are useful, for example, in medical applications (surgery or ophthalmology), optics communications, optical data processing or materials processing (drilling, welding or surface treatment). By means of the proposed method the irradiance profile of the output beam and other spatial characteristics, such as its beam quality factor or the kurtosis parameter, can be modified (see Ref. *Appl. Opt.*, **45**, 8902-8906 (2006)).

## **Chapter 5: Realizability conditions for partially coherent electromagnetic sources**

Spatially coherent beams have been studied in the previous chapters. There, the beam polarization properties could be described by means of the local polarization matrix. In general, however, beams are only partially coherent from the spatial point of view, and a more general formalism is necessary to characterize them. Although in the case of partially coherent but uniformly polarized beams

the polarization characteristics and the coherence properties can be studied independently, in more general cases they must be studied together by resorting to the recently developed correlation theory of electromagnetic fields.

In Chapter 5, the formalism of the cross-spectral density matrix (CSD) or, equivalently, the beam coherence-polarization (BCP) matrix, is introduced for describing electromagnetic partially coherent beams. It is well known that the mathematical structure of such correlation matrices cannot be chosen at will because of the non-negative definiteness constraint. In most cases, determining whether a specific correlation matrix is non-negative definite or not is a rather demanding task. Up to now, only few models for describing restricted classes of partially coherent optical vectorial beams have been found. Here, a practical recipe for devising a wide class of genuine correlation matrices, i.e. matrices for which the non-negative definiteness constraint is automatically satisfied, is presented. Based on a *generalized superposition rule* (see Refs. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **11**, 085706 (2009) and *Europhysics News, Section: Highlights*, **40** (4), 13 (2009)), such recipe affords a save guide for investigating new structures of the CSD matrix and allows us to find a number of physically realizable electromagnetic sources/beams with very peculiar properties. Moreover, the *generalized superposition rule* suggests us a method for synthesizing partially coherent and non-uniformly polarized beams.

## Chapter 6: Synthesis of general electromagnetic Schell-model sources

Scalar Schell-model (SM) sources, which are characterized by a shift-invariant degree of spatial coherence, have played an important role in the theory of coherence because it has been shown that fields radiated by several natural sources turns out to be of the SM type. Electromagnetic Schell-model (ESM) sources have been studied in detail from the theoretical point of view but only few experimental procedures have been proposed to generate them.

Here, we derive the realizability conditions for the most general ESM source and propose an experimental procedure for its synthesis (see Refs. *J. Opt. Soc. A* **25**, 1016-1021 (2008) and *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**, 1437-1443 (2009)). The pro-

cedure stems from the application of the van Cittert-Zernike theorem, starting from a spatially incoherent electromagnetic source, characterized by a suitable position-dependent polarization matrix. In this way, connection between the *generalized superposition rule* and the van Cittert-Zernike theorem is stressed. The primary incoherent source is generated by using an interferometric system of the Mach-Zehnder type where amplitude transmittances and anisotropic elements are present.

## Chapter 7: Synthesis of partially coherent spirally polarized beams

In Chapter 7 another synthesis method for partially coherent NUP beams, based on the vector mode expansion of the cross-spectral density matrix, has been proposed and tested. The procedure does not resort to the van Cittert-Zernike theorem, so that sources that can not be described by the Schell's model can be synthesized. In the performed experiment, two mutually uncorrelated NUP modes have been superimposed and the polarization characteristics of the obtained beam have been analyzed upon propagation. Each of the modes presented rotational symmetry and was endowed with a spiral-like polarization profile, so that the synthesized partially coherent beam was expected to preserve its transverse polarization profile upon paraxial propagation. Predictions have been confirmed by experimental results. Results included in this chapter will be published in Optics Communications (see "Synthesis and characterization of partially coherent beams with propagation-invariant transverse polarization pattern," by V. Ramírez-Sánchez, G. Piquero and M. Santarsiero (in press))

This work is connected to a field of current attention in Optics: the study of coherence and polarization properties of partially coherent and partially polarized beams when they are freely propagated. In particular, one of the main objectives in this subject is to derive the conditions under which the distribution of polarization of the field remains invariant upon free propagation.

## Chapter 8: Results and conclusions

In chapter 8, the main results and conclusions derived from this work are summarized. In the present section, chapter 8 is completely transcribed.

Regarding the aims of the thesis, the following general conclusions can be pointed out:

- Different methods for synthesizing completely coherent non-uniformly and totally polarized beams (NUTP), in particular, non-uniformly and linearly polarized beams, have been proposed. Furthermore, optical setups to experimentally generate them have been designed and optimized/developed.
- Synthesis of partially coherent and non-uniformly polarized fields has also been considered. On the one hand, the *generalized superposition rule*, which is connected with the application of the van Cittert-Zernike theorem, has been used to synthesize electromagnetic Schell-model sources. On the other hand, by resorting to the vectorial modal expansion of the cross-spectral density matrix, a partially coherent and spirally polarized field has been experimentally synthesized.
- Some new global parameters, which are useful for characterizing the non-uniform transverse distribution of polarization of the synthesized beams, have been introduced. Moreover, their measurability has been checked. Related to the spatial beam structure, changes in the quality beam parameter and the kurtosis parameter have been analyzed for different types of NUTP beams.

In a more specific way the following results can be stressed:

- Spirally polarized beams (SPBs) have been synthesized by using an optical system consisting of a non-conventional polarizer, in particular, an azimuthal polarizer (axis finder) or a liquid-crystal polarization converter and a polarization rotator. All the range of SPBs, from azimuthal to radial polarization, can be generated by using the previous experimental system. By

characterizing the distribution of polarization of these beams, it has been proved that a good agreement exists between theory and experiment.

- Spirally polarized beams belong to a more general class of non-uniformly and linearly polarized beams that can be generated by superimposing beams whose state of polarization is given by the vectors of the Gori's polarization basis. Moreover, such beams can be written as a superposition of optical vortex beams. Analytical expressions for the beam quality parameter have been obtained and we have demonstrated that by superimposing beams with different topologic charges, the quality of these beams can be improved with respect to the case where the beam presents a simple vortex. It has been shown that spirally, radially and azimuthally polarized beams has all of them the same value of  $Q$ .
- A method for synthesizing non-uniformly and totally polarized (NUTP) beams by using a Mach-Zehnder interferometer with amplitude transmittances placed in its arms has been proposed. It is possible to modify simultaneously the distribution of polarization and the spatial characteristics of the beam by changing suitably the transmittances parameters. In particular, a beam of this type has been experimentally synthesized by using a super-gaussian transmittance. Analytical expressions for the beam quality parameter and the kurtosis parameter at the system output have been derived.
- From the NUTP beams that have been synthesized before, a beam shaping procedure has been proposed. Such method allows us to simultaneously modify the irradiance beam profile, the focusing capacity and the degree of sharpness of the beam. Such characteristics have been studied through the beam quality and the kurtosis parameters. By rotating a polarizer placed at the interferometric system output, platykurtic, mesokurtic and leptokurtic beams can be generated and the value of the beam quality parameter can be minimized.
- A recipe, named the *generalized superposition rule* (GSR), for building genuine cross-spectral density matrices (CSD) has been derived. Such matrices

represent partially coherent electromagnetic sources that are always physically realizable. The weight functions and the kernels appearing in the GSR for building the CSD matrix for modeling an electromagnetic anisotropic Schell-model source have been found. Particularizing to the isotropic case, different types of electromagnetic sources have been obtained, such as, Gaussian Schell-model sources, sources with specular cross-correlation functions or Twisted Schell-model sources.

- An experimental setup for synthesizing *any* electromagnetic Schell-model source has been proposed. The synthesis procedure is based on the generalized superposition rule and can be splitted in two stages. In the first one, a Mach-Zehnder interferometer is used to generate a primary incoherent source with a suitable position-dependent polarization matrix. In the second one, the van Cittert-Zernike theorem is applied in order to endow the source with the desired coherence properties. To generate different electromagnetic Schell-model sources, the transmittances that must be placed in the interferometric system have been found. As particular examples, electromagnetic Gaussian Schell-model sources, sources with diagonal CSD matrix or with gaussian degree of polarization in the far field plane have been considered.
- In order to generate partially coherent and non-uniformly beams that can not be synthesized applying the van Cittert-Zernike theorem, another method of synthesis based on the modal expansion of the CSD matrix has been used. Using this alternative procedure a partially coherent and spirally polarized beam has been synthesized and it has been experimentally checked that the polarization pattern remains invariant upon free propagation.
- Global beam parameters to characterize the radial and the azimuthal polarization content in the transverse section of non-uniformly polarized beams have been proposed. Such parameters can be easily measured in terms of the local Stokes parameters. From the experimental point of view, these parameters are especially useful to describe completely and partially coherent beams with non-uniform distributions of polarization, such as, the beams that have been synthesized in the present thesis.

This thesis has been carried out with “Physics Optic and laser beams” research group in the Optic Department of Complutense University (Madrid, Spain) and Prof. Gori’s research group in the “Edoardo Amaldi” Physics Department of Roma Tre University (Rome, Italy).

# Lista de acrónimos

Acrónimo	Significado
AF	“Axis finder” o polarizador azimutal
CP	Convertidor de la polarización
EA	Elemento azimutal
Fuente EGSM	Fuente electromagnética del modelo de Gauss-Schell
Fuente ESM	Fuente electromagnética del modelo de Schell
Fuente ETSM	Fuente electromagnética de tipo “twisted” Schell
Fuente GSM	Fuente del modelo de Gauss-Schell
Fuente TSM	Fuente de tipo “twisted” Schell
Haz BG	Haz de tipo Bessel-Gauss
Haz NP	Haz no-polarizado
Haz NUP	Haz no-uniformemente polarizado
Haz PCEP	Haz parcialmente coherente y espiralmente polarizado
Haz PNUP	Haz parcialmente y no-uniformemente polarizado
Haz TCEP	Haz totalmente coherente y espiralmente polarizado
Haz TNUP	Haz totalmente y no-uniformemente polarizado
Haz TP	Haz totalmente polarizado
Interferómetro M-Z	Interferómetro de tipo Mach-Zenhder
Matriz BCP	Matriz de coherencia-polarización
RSG	Regla de superposición generalizada
SAP	Sistema de análisis de la polarización
SC	Sistema de colimación
SG	Supergaussiana





# Publicaciones

## Artículos relacionados con la tesis

Parte de los resultados que aparecen en esta memoria han sido presentados en los siguientes trabajos:

- “Global beam shaping with non-uniformly polarized beams: a proposal,” V. Ramírez-Sánchez and G. Piquero, *Appl. Opt.*, **45**, 8902-8906 (2006).
- “Conformado global de haces totalmente polarizados no-uniformemente mediante transmitancias en amplitud,” Victoria Ramírez-Sánchez y Gemma Piquero, *Opt. Pura Apl.*, **40**, 87-93 (2007).
- “Global parameters for characterizing the radial and azimuthal polarization content of totally polarized beams,” R. Martínez-Herrero, P.M. Mejías, G. Piquero and V. Ramírez-Sánchez, *Opt. Commun.*, **281**, 1976-1980 (2008).
- “Realizability condition for electromagnetic Schell-model sources,” F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi and V. Ramírez-Sánchez, *J. Opt. Soc. A* **25**, 1016-1021 (2008).
- “The beam quality parameter of spirally polarized beams,” V. Ramírez-Sánchez and G. Piquero, *J. Opt. A: Pure and Appl. Opt.*, **10**, 125004 (1-6) (2008).
- “Synthesis of electromagnetic Schell-model sources,” M. Santarsiero, R. Borghi, and V. Ramírez-Sánchez, *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**, 1437-1443 (2009).

- “On genuine Cross-Spectral Density Matrices,” F. Gori, V. Ramírez-Sánchez, M. Santarsiero and T. Shirai, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **11**, 085706 (2009).
- “Correlation Matrices for Optical Beams,” F. Gori, V. Ramírez-Sánchez, M. Santarsiero and T. Shirai, *Europhysics News, Section: Highlights*, **40** (4), 13 (2009).
- “Generation and characterization of spirally polarized fields,” V. Ramírez-Sánchez, G. Piquero and M. Santarsiero, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **11**, 085708 (2009).
- “Synthesis and characterization of partially coherent beams with propagation-invariant transverse polarization pattern,” V. Ramírez-Sánchez, G. Piquero and M. Santarsiero, *Opt. Commun.*, (En prensa) (2010).

## Otras publicaciones

- “Estudio de los parámetros de polarización a la salida de polarizadores lineales no-ideales,” Victoria Ramírez-Sánchez, Antonio Arévalo-Garbayo y Gemma Piquero Sanz, *Aprendizaje activo de la física y la química, colección: Didáctica de la Física y la Química*, 343-349 (Equipo Sirius, 2007) ISBN 978-84-95495-81-5.
- “Non-uniformly totally polarized beams synthesized by using super-gaussian apertures,” V. Ramírez-Sánchez and G. Piquero, *Proc. ICO Topical Meeting on Optoinformatics/Information Photonics*, St. Petersburg, Russia, September 4-7 (2006) ISBN 5-7921-0719-6 pp. 224-226.
- “Partially correlated thin annular sources. The vectorial case,” M. Santarsiero, V. Ramírez-Sánchez and R. Borghi, *J. Opt. Soc. Am. A*, (aceptado) (2010).

# Bibliografía

- [AB94] D. Ambrosini, V. Bagini, F. Gori and M. Santarsiero, “Twisted Gaussian Schell-model beams: a superposition model,” *J. Mod. Opt.*, **41**, 1391-1399 (1994).
- [AS72] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, (Dover Publications, New York, 1972).
- [AW00] G. P. Agrawal and E. Wolf, “Propagation-induced polarization changes in partially coherent optical beams,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **17**, 2019-2023 (2000).
- [BA89] M. J. Bastiaans, “Propagation laws for the second-order moments of the Wigner distribution function in first-order optical systems,” *Optik*, **82**, 173-181 (1989).
- [BD06] J. B. Bentley, J. A. Davis, M. A. Bandress and J. C. Gutierrez-Vega, “Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display”, *Opt. Lett.*, **31**, 649-651 (2006).
- [BE61] S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert Space* (Oxford University Press, Oxford, 1961).
- [BE04] M. V. Berry, “Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **6**, 259–268 (2004).
- [BG06] R. Borghi, F. Gori and M. Santarsiero, “Phase and Amplitude Retrieval in Ghost Diffraction from Field-Correlation Measurements,” *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 183901-183904 (2006).

- 
- [BG09] R. Borghi, F. Gori and S. A. Ponomarenko, "On a class of electromagnetic diffraction-free beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**, 2275-2281 (2009).
- [BL92] P. A. Bélanger, R. L. Lachance and C. Paré, "Super-Gaussian output from a  $CO_2$  laser by using a graded-phase mirror resonator," *Opt. Lett.*, **17**, 739-741 (1992).
- [BP91] P. A. Bélanger and C. Paré, "Optical resonators using graded-phase mirrors," *Opt. Lett.* **16**, 1057-1059 (1991).
- [BP04] I. V. Basistiy, V. A. Pasko, V. V. Slyusa, M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, "Synthesis and analysis of optical vortices with fractional topological charges," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **6**, S166-S169 (2004).
- [BS81] D. G. Burkhard and D. L. Shealy, "Simplified formula for the illuminance in an optical system," *Appl. Opt.*, **20**, 897-909 (1981).
- [BS97] R. Borghi and M. Santarsiero, " $M^2$  factor of Bessel-Gauss beams," *Opt. Lett.*, **22**, 262-264 (1997).
- [BS04] R. Borghi and M. Santarsiero, "Nonparaxial propagation of spirally polarized optical beams," *J. Opt. Soc. A*, **21**, 2029-2037 (2004).
- [BS05] R. Borghi, M. Santarsiero and M. A. Alonso, "Highly focused spirally polarized beams", *J. Opt. Soc. A*, **22** 1420-1431 (2005).
- [BW99] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* 7th (expanded) ed. (Cambridge U. Press, Cambridge, 1999).
- [CG03] Y. Cai, D. Ge and Q. Lin, "Fractional Fourier transform for partially coherent and partially polarized Gaussian Schell-model beams," *J. Opt. A: Pure App. Opt.*, **5**, 453-459 (2003).
- [CK77] L. W. Casperson, N. K. Kincheloe and O. M. Stafsudd, "Phase plates for laser beam compensation," *Opt. Commun.*, **21**, 1-4 (1977).

- 
- [CP73] A. J. Campillo, J. E. Pearson, S. L. Shapiro and N. J. Terrel, “Fresnel diffraction effects in the design of high-power laser systems,” *Appl. Phys. Lett.*, **23**, 85 (1973).
- [CW78] E. Collett and E. Wolf, “Is complete spatial coherence necessary for the generation of highly directional light beams?” *Opt. Lett.*, **2**, 27-29 (1978).
- [DC83] J. Deschamps, D. Courjon and J. Bulabois, “Gaussian Schell-model sources: an example and some perspectives,” *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 256-261 (1983).
- [DQ03] R. Dorn, S. Quabis and G. Leuchs, “Sharper focus for radially polarized light beams,” *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 233901 (2003).
- [DZ08] X. Du and D. Zhao, “Criterion for keeping completely unpolarized or completely polarized stochastic electromagnetic Gaussian Schell-model beams on propagation,” *Opt. Express*, **16**, 16172-16180, (2008).
- [ES08] S. C. McEldowney, D. M. Shemo and R. A. Chipman, “Vortex retarders produced from photo-aligned liquid crystal polymers”, *Opt. Express*, **16**, 7295-7308 (2008).
- [FG76] F. J. Feldman and S. J. Gitomer, “Annular lens soft aperture for high power laser systems,” *Appl. Opt.*, **15**, 1379-1380 (1976).
- [FT94] A. T. Friberg, E. Tervonen and J. Turunen, “Interpretation and experimental demonstration of twisted Gaussian Schell-model beams,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 1818-1826 (1994).
- [GG87] F. Gori, G. Guattari and C. Padovani, “Bessel Gauss beams,” *Opt. Commun.*, **64**, 491-495 (1987).
- [GG88] F. Gori, G. Guattari, C. Palma and C. Padovani, “Specular cross-spectral density functions,” *Opt. Commun.*, **68**, 239-243 (1988).
- [GH96] P. L. Greene and D. G. Hall, “Diffraction characteristics of the azimuthal Bessel-Gauss beam,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **13**, 962-966 (1996).

- 
- [GH98] P. L. Greene and D. G. Hall, "Properties and diffraction of vector Bessel-Gauss beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, **15**, 3020-2027 (1998).
- [GO70] J. W. Goodman, "Synthetic-aperture Optics," *Progress in Optics*, **8**, 1-50 (1970)
- [GO80] F. Gori, "Directionality and spatial coherence," *Opt. Acta*, **27**, 1025-1034 (1980).
- [GO83] F. Gori, "Mode propagation of the field generated by Collett-Wolf Schell-model sources," *Opt. Commun.*, **46**, 149-154 (1983)
- [GO85] J. W. Goodman, *Statistical Optics* (Willey, New York, 1985).
- [GO98] F. Gori, "Matrix treatment for partially polarized, partially coherent beams," *Opt. Lett.*, **23**, 41-43 (1998).
- [GO01] F. Gori, "Polarization basis for vortex beams," *J. Opt. Soc. A*, **18**, 1612-1617 (2001).
- [GO03] D. Goldstein, *Polarized light*, 2nd ed., Revised and expanded (Optical Science and Engineering, Dekker, 2003).
- [GO04] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 3rd ed. (Roberts & Co Publishers, Greenwood village, 2004).
- [GO08] F. Gori, "Partially correlated sources with complete polarization," *Opt. Lett.*, **33**, 2818-2820 (2008).
- [GP78] F. Gori and C. Palma, "Partially coherent sources which give rise to highly directional light beams," *Opt. Commun.*, **27**, 185-188 (1978).
- [GP80] G. Giuliani, Y. K. Park and R. L. Byer, "Radial birefringent element and its application to laser resonator design," *Opt. Lett.*, **5**, 491-493 (1980).
- [GR82] R. Grella, "Synthesis of generalized Collett-Wolf sources," *J. Opt.*, **13**, 127-131 (1982).

- 
- [GS98] F. Gori, M. Santarsiero, S. Vicalvi, R. Borghi and G. Guattari, "Beam Coherence Polarization matrix," *J. Eur. Opt. Soc. A: Pure Appl. Opt.*, **7**, 941-951 (1998).
- [GS00] F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi and G. Piquero, "Use of the van Cittert-Zernike theorem for partially polarized sources," *Opt. Lett.*, **25**, 1291-1293 (2000).
- [GS01] F. Gori, M. Santarsiero, G. Piquero, R. Borghi, A. Mondello and R. Simon, "Partially polarized Gaussian Schell-model beams," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **3**, 1-9 (2001).
- [GS06] F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi and E. Wolf, "Effects of coherence on the degree of polarization in Young interference pattern," *Opt. Lett.*, **31**, 688-690, (2006).
- [GS07] F. Gori and M. Santarsiero, "Devising genuine Cross-Spectral Densities," *Opt. Lett.*, **32**, 3531-3533 (2007).
- [GS08] F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi and V. Ramírez-Sánchez, "Realizability condition for electromagnetic Schell-model sources," *J. Opt. Soc. A*, **25**, 1016-1021 (2008).
- [HL08] B. Hao and J. Leger, "Numerical aperture invariant focus shaping using spirally polarized beams," *Opt. Commun.*, **281**, 1924-28 (2008).
- [HJ85] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [IH72] C. S. Ih, "Absorption lens for producing uniform laser beams," *Appl. Opt.*, **11**, 694-695 (1972).
- [IH90] K. Iwasaki, T. Hawashi, T. Goto and S. Shimizu, "Square and uniform laser output device: theory and applications," *Appl. Opt.*, **90**, 1736-1744 (1990).
- [IN89] G. Indebetouw, "Synthesis of polychromatic light sources with arbitrary degrees of coherence: some experiments," *J. Mod. Opt.*, **36**, 251-259 (1989).



- 
- [JA94] D.F.V. James, "Change of polarization of light beam on propagation in free-space," *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 1641-1643 (1994).
- [JH94] R. H. Jordan and D. G. Hall, "Free space azimuthal paraxial wave equation: the azimuthal Bessel-Gauss beam solution," *Opt. Lett.*, **19**, 427-429 (1994).
- [KK08] H. Kawauchi, Y. Kozawa, S. Sato, T. Sato and S. Kawakami, "Simultaneous generation of helical beams with linear and radial polarization by use of a segmented half-wave plate," *Opt. Lett.*, **33**, 399-401 (2008).
- [KS05] O. Korotkova, M. Salem, A. Dogariu and E. Wolf, "Changes in the polarization ellipse of random electromagnetic beams propagating through the turbulent atmosphere," *Waves in Random and Complex Media*, **15**, 353-364 (2005).
- [KW05] O. Korotkova and E. Wolf, "Changes in the state of polarization of a random electromagnetic beam on propagation," *Opt. Commun.*, **246**, 35-43 (2005).
- [LC99] Y. Liu, D. Cline and P. He, "Vacuum laser acceleration using a radially polarized CO<sub>2</sub> laser beam," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, **424**, 296-303 (1999).
- [LD95] Q. Lü, S. Dong and H. Weber, "Analysis of TEM<sub>00</sub> laser beam degradation caused by a birefringent Nd:YAG rod," *Opt. and Quant. Electron.* **27**, 777-783 (1995).
- [LE81] W. H. Lee, "Method for converting a Gaussian beams into a uniform beam," *Opt. Commun.*, **36**, 469-471 (1981).
- [LL03] S. Luo and B. Lü, "M<sup>2</sup> factor and kurtosis parameter of super-Gaussian beams passing through an axicon," *Optik*, **114**, 193-198 (2003).
- [LL06] Y. Li, H. Lee and E. Wolf, "Spectra, coherence and polarization in Young's interference pattern formed by stochastic electromagnetic beams," *Optics Commun.*, **265**, 63-72 (2006).

- 
- [LM09] Y. Lumer and I. Moshe, “Radial and azimuthal beam parameters”, *Opt. Lett.*, **34** 265-267 (2009).
- [LP88] S. Lavi, R. Prochaska and E. Karen, “Generalized beam parameters and transformation law for partially coherent light,” *Appl. Opt.*, **27**, 3696-3703 (1988).
- [LU06] A. Luis, “Ray picture of polarization and coherence in a Young interferometer,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **23**, 2855-2860 (2006).
- [LY04] J. Leach, E. Yao and M. J. Padgett, “Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam” *New J. Phys.*, **6**, 71,1-9 (2004).
- [MH79] R. Martínez-Herrero, “Expansion of complex degree of coherence,” *Nuovo Cimento*, **54**, 205-210 (1979).
- [ML08] G. Machavariani, Y. Lumer, I. Moshe, A. Meir and S. Jackel, “Spatially-variable retardation plate for efficient generation of radially and azimuthally polarized beams,” *Opt. Commun.*, **281**, 732-738 (2008).
- [MM92] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías and G. Piquero, “Quality improvement of partially coherent symmetric-intensity beams caused by quartic phase distortions,” *Opt. Lett.* **17**, 1650-1651 (1992).
- [MM02] P.M. Mejías, R. Martínez-Herrero, G. Piquero and J.M. Movilla, “Parametric characterization of the spatial structure of non-uniformly polarized laser beams”, *Prog. in Quant. Electron.*, **26**, 65-130 (2002).
- [MM06] R. Martínez-Herrero, P.M. Mejías and G. Piquero, “Overall parameters for the characterization of non-uniformly totally polarized beams”, *Opt. Commun.*, **265**, 6-10 (2006).
- [MM07] R. Martínez-Herrero and P. M. Mejías, “Electromagnetic fields that remain totally polarized under propagation,” *Opt. Commun.*, **279** (2007) 20-22.

- 
- [MM08a] R. Martínez-Herrero, P.M. Mejías, G. Piquero and V. Ramírez-Sánchez, “Global parameters for characterizing the radial and azimuthal polarization content of totally polarized beams”, *Opt. Commun.*, **281**, 1976-1980 (2008).
- [MM08b] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías and S. Bosch, “On the vectorial structure of non-paraxial radially polarized light fields,” *Opt. Commun.*, **281**, 3046-50 (2008).
- [MM08c] R. Martínez-Herrero and P. M. Mejías, “Propagation of light fields with radial or azimuthal polarization distribution at a transverse plane” *Opt. Express*, **16**, 9021-9033 (2008).
- [MM09] R. Martínez-Herrero, P.M. Mejías and G. Piquero, *Characterization of partially polarized light fields* (Springer Series in Optical Sciences, **147**, 2009).
- [MP95] R. Martínez-Herrero, G. Piquero and P. M. Mejías, “On the propagation of the kurtosis of general beams” *Opt. Commun.* **115**, 225-232 (1995).
- [MP04] R. Martínez-Herrero, G. Piquero and P. Mejías, “Parametric characterization of the spatial structure of partially coherent and partially polarized beams,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **6**, S67-S71 (2004).
- [MW95] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, (Cambridge U. Press, Cambridge, 1995).
- [NB01] L. Novotny, M. R. Beversluis, K. S. Youngworth and T. G. Brown, “Longitudinal field modes probed by single molecules” *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5251-5254 (2001).
- [NB03] A. Niv, G. Biener, V. Kleiner and E. Hasman, “Formation of linearly polarized light with axial symmetry by use of space-variant subwavelength gratings,” *Opt. Lett.*, **28**, 510-512 (2003).

- 
- [NG05] C. H. Niu, B. Y. Gu, B. Z. Dong and Y. Zhang, "A new method for generating axially-symmetric and radially-polarized beams," *J. Phys. D*, **38**, 827-832 (2005).
- [NN99] V. G. Niziev and A. V. Nesterov, "Influence of beam polarization on laser cutting efficiency" *J. Phys. D*, **32**, 1455-1461 (1999).
- [NN00] A. V. Nesterov and V. G. Niziev, "Laser beams with axially symmetric polarization," *J. Phys. D*, **33**, 1817-1822 (2000).
- [NN07] A. V. Novitsky and D. V. Novitsky, "Negative propagation of vector Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, **24**, 2844-2849 (2007).
- [OS04] S. Orlov and A. Stabinis, "Propagation of superpositions of coaxial optical Bessel beams carrying vortices," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **6**, S259-S262 (2004)
- [PG02] G. Piquero, F. Gori, P. Romanini, M. Santarsiero, R. Borghi and A. Mondello, "Synthesis of partially polarized Gaussian Schell-model sources," *Opt. Commun.*, **208**, 9-16 (2002).
- [PK07] JX. Pu, O. Korotkova and E. Wolf, "Polarization-induced spectral changes on propagation of stochastic electromagnetic beams," *Phys. Rev. E*, **75**, 056610-2 (2007).
- [PM92] G. Piquero, P. M. Mejías and R. Martínez Herrero, "Linear Gaussian intensity distribution synthesized by reflection on elliptic cylinders: a proposal," *Appl. Opt.*, **31**, 2970-2971 (1992).
- [PM93] G. Piquero, P. M. Mejías and R. Martínez-Herrero, "On the kurtosis parameter of laser beams", Proc. 1<sup>st</sup> Workshop on Laser Beam Characterization, pp. 141-148 (1993).
- [PM94] G. Piquero, P. M. Mejías and R. Martínez-Herrero, "Sharpness changes of Gaussian beams induced by spherically aberrated lenses," *Opt. Commun.* **107**, 179-183 (1994).

- 
- [PM99a] G. Piquero, J.M. Movilla, P.M. Mejías and R. Martínez-Herrero, “Degree of polarization of non-uniformly partially polarized beams: a proposal”, *Opt. Quant. Electron.*, **31**, 223-225 (1999).
- [PM99b] G. Piquero, J. M. Movilla, P. M. Mejías and R. Martínez-Herrero, “Beam quality of partially polarized beams propagating through lens-like birefringent elements,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **16**, 2666-2668 (1999).
- [PS02] G. Piquero, J. Serna, R. Martínez-Herrero and P. M. Mejías, “Beam shaping analysis based on overall spatial parameters” *Research Signpost, Recent Res. Devel. Optics*, **2**, 239-256 (2002).
- [QD05] S. Quabis, R. Dorn and G. Leuchs, “Generation of a radially polarized doughnut mode of high quality,” *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 597-600 (2005).
- [RA06] H. Roychowdhury, G. Agrawal and E. Wolf, “Changes in the spectrum, in the spectral degree of polarization, and in the spectral degree of coherence of a partially coherent beam propagating through a gradient-index fiber,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **23**, 940-948 (2006).
- [RK05] H. Roychowdhury and O. Korotkova, “Realizability conditions for electromagnetic Gaussian Schell-model sources,” *Opt. Commun.*, **249**, 379-385 (2005).
- [RP09] L. Rao, J. Pu, Z. Chen and P. Yei, “Focus shaping of cylindrically polarized vortex beams by a high numerical-aperture lens,” *Optics and Laser Technology*, **41**, 241 (2009).
- [RS80] P. W. Rhodes and D. L. Shealy, “Refractive optical systems for irradiance redistribution of collimated radiation: their design and analysis,” *Appl. Opt.*, **19**, 3545-3553 (1980).
- [RS00] S. Ramee and R. Simon, “Effect of holes and vortices on beam quality,” *J. Opt. Soc. Am. A* **17** 84-94 (2000).
- [RW05] H. Roychowdhury and E. Wolf, “Young’s interference experiment with light of any state of coherence and polarization,” *Opt. Commun.*, **252**, 268-274 (2005).

- 
- [RW07] H. Ren and S. T. Wu, “Liquid-crystal-based linear polarization rotator” *Appl. Phys. Lett.* **90**, 121123 (2007).
- [SB06] M. Santarsiero and R. Borghi, “Measuring spatial coherence by using a reversed-wavefront Young interferometer,” *Opt. Lett.*, **96**, 183901-183904 (2006).
- [SB07] A. K. Spilman and T. G. Brown, “Stress birefringent, space-variant wave plates for vortex illumination,” *Appl. Opt.*, **46**, 61-66 (2007)
- [SC67] A. Schell, “A technique for the determination of the radiation pattern of a partially coherent aperture” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **15**, 187-188 (1967).
- [SE99] S.R. Seshadri, “Partially coherent Gaussian Schell-model electromagnetic beam,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **16**, 1373-1380 (1999).
- [SE00] S.R. Seshadri, “Polarization properties of partially coherent Gaussian Schell-model electromagnetic beams,” *J. Appl. Phys.* **87**, 4084-4093 (2000).
- [SE08] S. R. Seshadri, “Electromagnetic modified Bessel-Gauss beams and waves,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **25**, 1-8 (2008).
- [SG79] P. de Santis, F. Gori, G. Guattari and C. Palma, “An example of a Collett-Wolf source,” *Opt. Commun.*, **29**, 256-260 (1979).
- [SG86] P. De Santis, F. Gori, G. Guattari and C. Palma, “Synthesis of partially coherent fields,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **3**, 1258-1262 (1986).
- [SG07] M. Santarsiero, F. Gori, R. Borghi and G. Guattari, “Vector-mode analysis of symmetric two-point sources”, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **9**, 593-602 (2007).
- [SH62] W. A. Shurcliff, *Polarized light*, 3rd ed. (Harvard University Press, Cambridge, 1962).

- 
- [SH05] T. Shirai, "Polarization properties of a class of electromagnetic GSM beams which have the same far-zone intensity distribution as a fully coherent laser beam," *Opt. Commun.*, **256**, 197-209 (2005).
- [SI86] Siegman, *Lasers*, (University Science Books, 1986).
- [SI90] A. E. Siegman, "New developments in laser resonators," *Proc. SPIE*, **1224**, 2-14 (1990).
- [SI93] A. E. Siegman, "Binary phase plates cannot improve laser beam quality," *Opt. Lett.*, **18**, 675-677 (1993).
- [SK05] T. Shirai, O. Korotkova and E. Wolf, "A method of generating electromagnetic Gaussian Schell-model beams," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **7**, 232-237 (2005).
- [SL74] W. W. Simmons, G. W. Leppelmeier and B. C. Johnson, "Optical beam shaping devices using polarization effects," *Appl. Opt.*, **74**, 1629-1632 (1974).
- [SM91] J. Serna, R. Martínez-Herrero and P. M. Mejías, "Parametric characterization of general partially coherent beams propagating through ABCD optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A*, **8**, 1094-1098 (1991).
- [SM92] J. Serna, P. M. Mejías and R. Martínez-Herrero, "Beam quality changes of beams propagating through super-Gaussian apertures," *Laser Energy Distribution Profiles*, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., **1834**, 162-166 (1992).
- [SM93a] J. Serna, P. M. Mejías and R. Martínez-Herrero, "Beam quality changes of Hermite-Gauss mode beams and Gauss Schell-model fields propagating through super-Gaussian apertures," *Opt. Commun.*, **102**, 162-168 (1993).
- [SM93b] R. Simon and N. Mukunda, "Twisted Gaussian Schell-model beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 95-109 (1993).

- [SP96] J. Serna, G. Piquero, P. M. Mejías and R. Martínez-Herrero, “Parametric characterization of Hermite-Gauss mode beams and Gauss Schell-model fields propagating through super-Gaussian apertures,” *Opt. and Quant. Electron.*, **28**, 1039-10488 (1996).
- [SS96] M. Stalder and M. Schadt, “Linearly polarized light with axial symmetry generated by liquid-crystal polarization converters,” *Opt. Lett.*, **21**, 1948-1950 (1996).
- [SW07] T. Shirai and E. Wolf, “Correlations between intensity fluctuations in stochastic electromagnetic beams of any state of coherence and polarization,” *Opt. Commun.*, **272**, 289-292 (2007).
- [TE03] J. Tervo, “Azimuthal polarization and partial coherence,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **20**, 1974-1980 (2003).
- [TF90] S. C. Tidwell, D. H. Ford and W. D. Kimura, “Generating radially polarized beams interferometrically,” *Appl. Opt.*, **29**, 2234-39 (1990).
- [TK08] Y. Y. Tzeng, S. W. Ke, C. L. Ting, A. Y-G Fuh and T-H Lin, “Axially symmetric polarization converters based on photo-aligned liquid crystal films,” *Opt. Express*, **16**, 3768-75 (2008).
- [TS04] J. Tervo, T. Setälä and A. T. Friberg, “Theory of partially coherent electromagnetic fields in the space-frequency domain,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **21**, 2205-2215 (2004).
- [TV91] J. Turunen, A. Vasara and A. T. Friberg, “Propagation invariance and self-imaging in variable-coherence optics,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **8**, 282-289 (1991).
- [TV08] J. Turunen and P. Vahimaa, “Independent-elementary-field model for three-dimensional spatially partially coherent sources,” *Opt. Express*, **16**, 6433-6442 (2008).
- [TY05a] S. H. Tao, X. C. Yuan, J. Lin and R. E. Burge, “Residue orbital angular momentum in interferenced double vortex beams with unequal topological charges,” *Opt. Express*, **14**, 535–541 (2005).



- 
- [TY05b] S. H. Tao and X. C. Yuan, “Fractional optical vortex beam induced rotation of particles,” *Opt. Express* **13** 7726-31 (2005).
- [VE82] W. B. Veldkamp, “Laser beam profile shaping with interlaced binary diffraction gratings,” *Appl. Opt.*, **21**, 3209-3212 (1982).
- [VJ08] S. N. Volkov, D. F. V. James, T. Shirai and E. Wolf, “Intensity fluctuations and the degree of cross-polarization in stochastic electromagnetic beams,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **10**, 1-4 (2008).
- [VP04] G. Volpe and D. Petrov, “Generation of cylindrical vector beams with few-mode fibers excited by Laguerre-Gaussian beams,” *Opt. Commun.*, **237**, 89-95 (2004).
- [VT06] P. Vahimaa and J. Turunen, “Finite-elementary-source model for partially coherent radiation,” *Opt. Express*, **14**, 1376-1381 (2006).
- [WE92] H. Weber, “Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media”, *Opt. Quant. Electron.*, **24**, 1027-1049 (1992).
- [WO59] E. Wolf, “Coherence properties of partially polarized electromagnetic radiation” *Il Nuovo Cimento*, **13**, 1165-1181 (1959).
- [WO82] E. Wolf, “New theory of partial coherence in the space-frequency domain. Part I: spectra and cross spectra of steady-state sources,” *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 343 (1982).
- [WO03] E. Wolf, “Unified theory of coherence and polarization of statistical electromagnetic beams,” *Phys. Lett. A*, **312**, 263-267 (2003).
- [WO07a] E. Wolf, *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [WO07b] E. Wolf, “Polarization invariance in beam propagation,” *Opt. Lett.*, **32**, 3400-3401 (2007).
- [YB00] K. S. Youngworth and T. G. Brown, “Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams,” *Opt. Express*, **7**, 77-87 (2000).

- 
- [ZH04] Q. Zhan, “Trapping metallic Rayleigh particles with radial polarization,” *Opt. Express*, **12**, 3377-3382 (2004).
- [ZH09] Q. Zhan, “Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications,” *Advances in Optics and Photonics*, **1**, 1-57 (2009).
- [ZL02] Q. Zhan and J. R. Leger, “Focus shaping using cylindrical vector beams,” *Opt. Express* **10** 324-331 (2002).
- [ZW08] D. M. Zhao and E. Wolf, “Light beams whose degree of polarization does not change on propagation,” *Opt. Commun.*, **281**, 3067-3070 (2008).
- [ZZ08] YB. Zhu, DM. Zhao and XY. Du, “Propagation of stochastic Gaussian-Schell model array beams in turbulent atmosphere,” *Opt. Express*, **16**, 18437-18442 (2008).